

---

XXV CONGRESSO NACIONAL DE MATEMÁTICA  
APLICADA E COMPUTACIONAL – CNMAC

MINICURSO

---



Usina hidroelétrica de El Cajón, em Honduras

---

OPERAÇÃO ÓTIMA DE SISTEMAS HIDROTÉRMICOS

Humberto José Bortolossi (PUC-Rio/UESC)

Setembro de 2002

Nova Friburgo, RJ, Brasil

---



# Sumário

Introdução	3
<b>1 O modelo discreto <math>M_{NS}</math></b>	<b>7</b>
1.1 Descrição do problema . . . . .	7
1.2 O modo ótimo de operação das usinas térmicas . . . . .	9
1.3 A formulação discreta $M_{NS}$ . . . . .	17
1.4 Um exemplo: o sistema El Cajón . . . . .	17
<b>2 O modelo contínuo <math>M_\infty</math></b>	<b>21</b>
2.1 As variáveis de controle $q$ e $s$ . . . . .	21
2.2 A existência de uma operação ótima para $M_\infty$ . . . . .	23
2.3 O volume $v$ como variável de controle . . . . .	33
<b>3 Condições necessárias para otimalidade no caso contínuo</b>	<b>41</b>
3.1 Condições locais para $M_\infty^v$ . . . . .	41
3.2 O caso de afluência $b \equiv 0$ . . . . .	44
3.3 Condições locais para $M_{NS}$ . . . . .	46
3.4 Globalidade e unicidade . . . . .	48
<b>4 A combinatória para o modelo contínuo</b>	<b>53</b>
4.1 Um problema de caminho mínimo . . . . .	53
4.2 O caminho mínimo com restrições adicionais . . . . .	55

---

4.3	A combinatória do modelo contínuo . . . . .	57
<b>5</b>	<b>Resultados numéricos</b>	<b>61</b>
<b>Apêndice</b>		
<b>1</b>	<b>Otimização em espaços de dimensão infinita</b>	<b>65</b>
1.1	Espaços vetoriais normados . . . . .	65
1.2	Espaços de Banach . . . . .	68
1.3	O teorema de Weierstrass . . . . .	69
1.4	Um exemplo interessante . . . . .	70
1.5	Extremos locais . . . . .	71
1.6	Derivadas direcionais . . . . .	72
1.7	A regra de Fermat em espaços de dimensão infinita . . . . .	73
1.8	Os lemas de du Bois-Reymond e Lagrange . . . . .	74
1.9	O teorema de Ascoli-Arzelá . . . . .	76
1.10	Funções absolutamente contínuas . . . . .	76
	<b>Bibliografia</b>	<b>79</b>

# Introdução

Neste minicurso, estudaremos o modo ótimo de operação de um sistema consistindo de uma única usina hidroelétrica e várias usinas térmicas. A demanda de energia é atendida pela soma das gerações da usina hidroelétrica e das usinas térmicas. O custo de operação é modelado de modo que ele dependa apenas da geração das usinas térmicas.

O problema de planejamento hidrotérmico tem sido estudado extensivamente tanto em aspectos teóricos quanto computacionais. Referências bibliográficas podem ser encontradas em [06, 17, 25]. A modelagem depende das aplicações: o horizonte de tempo pode ser curto (na escala de horas, dias ou semanas) ou longo (na escala de anos). A presença de elementos estocásticos e a escolha entre variáveis discretas ou contínuas também são relevantes. Para um modelo fixo, alguns autores consideram propriedades específicas do modo ótimo de operação, enquanto que outros consideram sua existência (uma tarefa não trivial no caso de variáveis de controle contínuas).

Em modelos anteriores [07, 36], a eficiência na geração da usina hidroelétrica é modelada de forma a independar do volume de água no reservatório, o que simplifica consideravelmente a matemática envolvida. Estes modelos consideram o problema de planejamento hidrotérmico em horizontes de tempo longos: cada problema de otimização pode ser interpretado como um instanciamento de um problema estocástico, para o qual a afluência e a demanda são geradas de maneira aleatória. Em geral, contudo, a eficiência da geração da usina hidroelétrica está associada com a geometria do reservatório: ela depende do volume de água presente no reservatório. Tal situação já foi considerada em diferentes problemas de planejamento hidrotérmico ([14] é um exemplo). No modelo discreto que usaremos, apresentado em [33], a eficiência aumenta com o volume de água no reservatório devido a razões físicas, de uma maneira específica que será descrita posteriormente. Neste modelo, isto faz com que o conjunto admissível do problema de otimização seja *não-convexo*.

Para o caso de eficiência hídrica variável, um dos algoritmos de melhor desempenho é o SDDP [27, 28, 29, 33]. A aproximação do modo ótimo obtida por este algoritmo, contudo, era muito irregular para sugerir um problema variacional subjacente, uma caminho natural se os intervalos de tempo em cada estágio diminuíssem. Isto nos leva a considerar um limite contínuo do modelo. Surpreendentemente, o modelo contínuo possui propriedades mais rígidas que não aparecem em suas aproximações discretas. Assim, por exemplo, uma solução admissível da equação de Euler-Lagrange associada ao problema de otimização, com valores de fronteira fixos, é necessariamente uma operação ótima no intervalo de tempo considerado.

No capítulo 1 apresentamos o problema de otimização em sua versão discreta. Começamos calculando uma função de custo acumulativo  $p(k)$  — o modo ótimo de operação das usinas térmicas para uma dada demanda térmica  $k$ . As partes hídrica e térmica acoplam-se somente através de  $k$ . Vamos assumir que cada uma das  $NT$  usinas térmicas possuam um custo de operação quadrático: o cálculo de  $p$  então admite um algoritmo que é linear em  $NT$  [23]. Contudo, nossos resultados teóricos se estendem para funções convexas suaves. Descrevemos e demonstramos as propriedades básicas de  $p(k)$  que serão úteis no resto do texto. O problema de otimização das usinas hidroelétrica e térmicas então desacoplam e é possível reescrever o problema de otimização original usando apenas os turbinamentos e vertimentos em cada estágio como variáveis de controle, uma vez que a função custo incorpora a parte térmica do sistema. Apresentamos então um exemplo concreto: procurar pelos turbinamentos e vertimentos ótimos para um período de 48 meses para o sistema hidrotérmico El Cajón de Honduras, que consiste de uma usina hidroelétrica e oito usinas térmicas. São fornecidos os dados reais das usinas, como também séries temporais da demanda e afluência mensais. Descrevemos então a operação de menor custo que foi conseguida com técnicas padrão de otimização (*Aitken double sweep*, *steepest descent* e *projected gradient*), a qual não foi provada ser uma operação ótima ou mesmo uma aproximação da operação ótima. No capítulo 5, voltaremos a versão contínua do exemplo: calcularemos um modo de operação contínuo e demonstraremos sua otimalidade. Verificaremos então que a operação discreta obtida no final do capítulo 1 é, de fato, uma aproximação do ótimo contínuo.

No capítulo 2 descrevemos o modelo contínuo, obtido levando-se ao infinito o número de estágios do modelo discreto. Alguns cuidados devem ser tomados durante este processo, a fim de permitir a perda de diferenciabili-

dade da solução ótima. A existência de um ótimo para modelos discretos segue-se de um argumento simples de compacidade. Para o modelo contínuo, usaremos argumentos de convergência fraca para provar a existência de um modo ótimo.

No capítulo 3 introduzimos o conceito de *operação econômica*, na qual vertimento é permitido somente quando o reservatório está cheio. Provamos então o fato natural de que o problema de otimização contínuo atinge o mesmo mínimo quando restrito ao conjunto de operações econômicas admissíveis. Para operações econômicas, o volume de água no reservatório é a (única) variável de controle. A partir de técnicas variacionais, obtemos condições locais de otimalidade para operações econômicas em um dado intervalo de tempo. Tais condições necessárias são também suficientes para a otimalidade global, desde que a operação resultante seja admissível, apesar do fato do funcional custo não ser convexo quando descrito em termos do volume. A contrapartida discreta das condições locais de otimalidade, no limite contínuo, de fato converge para as condições locais do modo contínuo, obtidas variacionalmente. A maioria das dificuldades combinatórias associadas com as condições de Karush-Kuhn-Tucker no caso discreto desaparecem: no caso contínuo é muito mais simples identificar em quais estágios o controle ótimo deve atingir a fronteira do conjunto admissível.

A presença de afluência complica a caracterização variacional do mínimo local: somos forçados a resolver uma equação integro-diferencial que, quando diferenciada com relação ao tempo, torna-se uma equação diferencial de segunda ordem — isto nos permite pensar nas condições necessárias para um ótimo local como sendo uma “equação geodésica”. A metáfora funciona bem e ela conduz aos resultados do capítulo 4: interpretamos estas operações especiais como geodésicas no espaço-tempo, para o qual existe no máximo uma geodésica unindo dois pontos. Pode acontecer de uma operação ótima local admissível estar definida apenas para um pequeno intervalo de tempo: devemos então estudar como justapor operações ótimas locais. Para isto, descrevemos um procedimento simples que encontra o caminho mínimo entre dois pontos de uma região fechada no plano com fronteira suave. O problema de planejamento hidrotérmico é análogo: procuramos por um caminho mínimo unindo dois pontos em uma região fechada do plano tempo-volume, onde a distância é interpretada como um custo. As propriedades para segmentos de retas obtidas no procedimento acima têm interpretações naturais, uma vez que a metáfora de curva geodésica é utilizada. Existe uma ressalva:

geodésicas não continuam arbitrariamente, como veremos, e isto complica alguns aspectos globais. Mesmo assim, encontraremos condições necessárias restritivas para a justaposição ótima de caminhos ótimos.

Finalmente, no capítulo 5, aplicamos estas técnicas para a versão contínua do exemplo de El Cajón, apresentado no capítulo 1.

Os pré-requisitos da teoria de otimização em espaços de dimensão finita podem ser encontrados em [03]. No apêndice, fazemos uma rápida revisão das definições e teoremas envolvidos na teoria de otimização em espaços de dimensão infinita, cujas demonstrações podem ser encontradas em [21] e [34].

O material apresentado neste texto vem de um trabalho conjunto desenvolvido com Carlos Tomei e Mário Veiga Pereira e, mais recentemente, com a colaboração de Paula Varella Calux (que fez uma extensão para o caso de várias usinas hidroelétricas dispostas em série [05]) e Bernardo Kulnig Pagnoncelli (que programou os vários modelos na linguagem AMPL e está estudando o uso de métodos de ponto interior em problemas de planejamento hidrotérmico).



# Capítulo 1

## O modelo discreto $M_{NS}$

### 1.1 Descrição do problema

O problema de operação hidrotérmica consiste em se determinar, para uma discretização do intervalo de tempo  $[0, T]$  em  $NS$  estágios (veja a figura (1.1)), os valores de turbinamento ( $q_t$ ) e vertimento ( $s_t$ ) de uma usina hidroelétrica, junto com as gerações das usinas térmicas ( $g_{t,j}$ ), a fim de que a demanda ( $d_t$ ) seja atendida em cada estágio  $t$  da discretização e o custo total de operação seja mínimo. De especial interesse é o volume  $v_t$  no início de cada estágio  $t$ .



Figura 1.1: Discretização do intervalo  $[0, T]$ .

Mais especificamente, queremos

#### **Problema 1.1** (DO PLANEJAMENTO HIDROTÉRMICO)

$$\text{minimizar } \sum_{t=1}^{NS} \sum_{j=1}^{NT} c_j (g_{t,j}) \cdot \Delta\tau$$

sujeito às restrições

$$\left\{ \begin{array}{l} h_t + \sum_{j=1}^{NT} g_{t,j} = d_t, \\ h_t = \rho(v_t) \cdot q_t, \\ v_{t+1} = v_t + b_t \cdot \Delta\tau - q_t \cdot \Delta\tau - s_t \cdot \Delta\tau, \text{ (equação de balanço hídrico)} \\ 0 \leq g_{t,j} \leq \bar{g}_j, \quad 0 \leq q_t \leq \bar{q}, \quad \underline{v} \leq v_{t+1} \leq \bar{v}, \quad 0 \leq s_t, \end{array} \right.$$

para  $t = 1, \dots, NS$  e  $j = 1, \dots, NT$ , onde:

$NS$  é o número de estágios,

$NT$  é o número de usinas térmicas,

$g_{t,j}$  é a geração da  $j$ -ésima usina térmica no estágio  $t$  (MW),

$\bar{g}_j$  é a geração máxima de  $j$ -ésima usina térmica (MW),

$d_t$  é a demanda no estágio  $t$  (MW),

$c_j$  é o custo unitário da  $j$ -ésima usina térmica ((\$/s)/MW),

$h_t$  é a geração da usina hidroelétrica (MW),

$v_{t+1}$  é o volume do reservatório no fim do estágio  $t$  (m<sup>3</sup>),

$v_t$  é o volume do reservatório no início do estágio  $t$  (m<sup>3</sup>),

$\underline{v}$  é o volume mínimo do reservatório (m<sup>3</sup>),

$\bar{v}$  é o volume máximo do reservatório (m<sup>3</sup>),

$q_t$  é o turbinamento da usina hidroelétrica no estágio  $t$  (m<sup>3</sup>/s),

$\bar{q}$  é turbinamento máximo da usina hidroelétrica (m<sup>3</sup>/s),

$b_t$  é a vazão afluente no reservatório no estágio  $t$  (m<sup>3</sup>/s),

$\rho$  é o coeficiente de produção da usina hidroelétrica (MW/m<sup>3</sup>/s),

$s_t$  é o vertimento efetuado no reservatório no estágio  $t$  (m<sup>3</sup>/s),

$\Delta\tau$  é a quantidade de segundos do estágio (s).

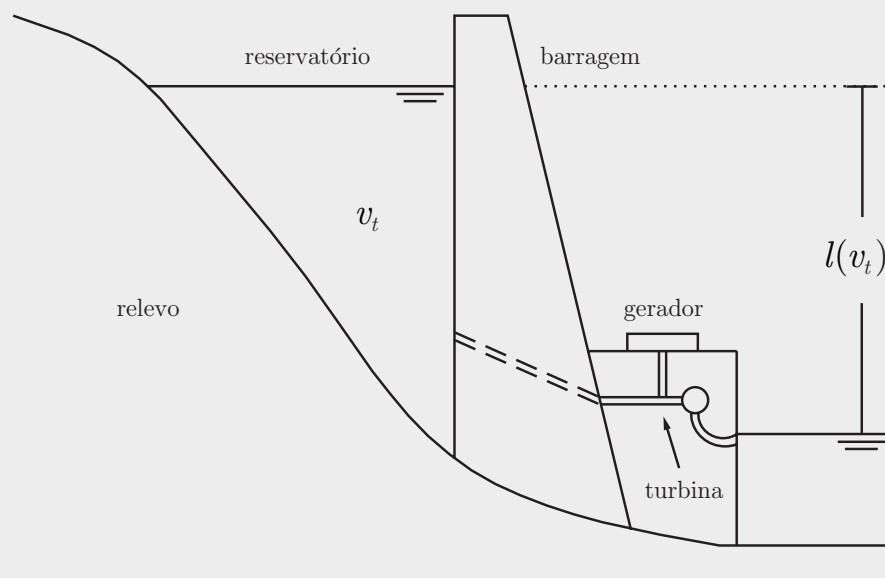
As variáveis de controle são os turbinamentos  $q_t$  e vertimentos  $s_t$ , e as gerações  $g_{t,j}$  das usinas térmicas. O volume inicial  $v_1$  do reservatório é fornecido.

Vamos supor que a função custo de geração unitária das térmicas é quadrática, isto é, que

$$c_j(g_{t,j}) = c_j \cdot g_{t,j}^2,$$

com  $c_j$  uma constante positiva. O coeficiente de produção  $\rho$  é definido de acordo com o formato do reservatório e introduz não-linearidade ao problema (veja [33]).

Vamos exigir que  $\rho$  seja não-decrescente e estritamente *log-côncavo* (isto é,  $\ln \rho$  é estritamente côncavo).



Por exemplo,  $x^\alpha$ , para  $\alpha > 0$ , é uma função estritamente log-côncava. Uma escolha típica é  $\rho(x) = r \cdot \sqrt{x}$ , com  $r$  uma constante positiva.

A operação ótima de um sistema hidrotérmico tem sido extensivamente estudada em seus aspectos teóricos e computacionais. Referências sobre o assunto podem ser encontradas em [06, 17, 25]

Em modelos anteriores [07, 30, 36], o coeficiente de produção é considerado constante, simplificando substancialmente a matemática envolvida. Estes modelos consideram o problema de planejamento hidrotérmico de longo prazo como uma instância de um problema estocástico, para o qual a afluência e a demanda são geradas aleatoriamente.

## 1.2 O modo ótimo de operação das usinas térmicas

Somente uma variável acopla as gerações de energia hidroelétrica e térmica em cada estágio  $t$ : a *demanda térmica*

$$k_t = k_t(v_t, q_t, d_t) = d_t - h_t = d_t - \rho(v_t) \cdot q_t.$$

Podemos nos perguntar qual a melhor maneira de se operar as usinas térmicas para um valor fixo da demanda térmica. Este problema é invariante no

tempo e, para simplificar a notação, omitiremos o índice  $t$  até o final desta seção. Considere, portanto, o

**Problema 1.2** (DA OPERAÇÃO ÓTIMA DAS USINAS TÉRMICAS)

$$\text{minimizar } \sum_{j=1}^{NT} c_j \cdot g_j^2 \text{ com as restrições } \begin{cases} \sum_{j=1}^{NT} g_j = k, \\ 0 \leq g_j \leq \bar{g}_j. \end{cases}$$

**Teorema 1.1** Suponha que as restrições do problema (1.2) determinem um domínio admissível não-vazio. Então o problema (1.2) admite uma única solução.

*Demonstração.* Basta observar que o conjunto admissível do problema (1.2) é um conjunto compacto e convexo, e que a função-objetivo é contínua e estritamente convexa. ■

Desta maneira, para cada valor  $k_t$  da demanda térmica, podemos associar o custo  $p(k_t)$  que é calculado a partir do correspondente modo ótimo de operação das usinas térmicas. A seguir vamos descrever um algoritmo que encontra a solução do problema (1.2).

**Algoritmo**

1. Numere as usinas térmicas de modo a ter  $c_1 \cdot \bar{g}_1 \leq \dots \leq c_{NT} \cdot \bar{g}_{NT}$ .
2. Defina  $\kappa_0 = 0$  e  $\kappa_s = \sum_{r=1}^{s-1} \bar{g}_r + c_s \cdot \bar{g}_s \cdot H^{(s)}$  para  $s = 1, \dots, NT$  com

$$H^{(s)} = \sum_{r=s}^{NT} 1/c_r$$

(os  $\kappa_s$  representam os valores da demanda térmica  $k$  para os quais novas usinas térmicas atingem suas gerações máximas).

3. Defina  $\nu_0 = (0, \dots, 0)$  e  $\nu_s = (\bar{g}_1, \dots, \bar{g}_s, c_s \cdot \bar{g}_s / c_{s+1}, \dots, c_s \cdot \bar{g}_s / c_{NT})$  para  $s = 1, \dots, NT$  (os vetores  $\nu_s$  representam a configuração ótima das usinas térmicas para  $k = \kappa_s$ ).
4. Se a demanda térmica  $k$  é igual a  $\kappa_{NT} = \sum_{j=1}^{NT} \bar{g}_j$  então a solução do problema (1.2) é dada por  $g_1 = \bar{g}_1, g_2 = \bar{g}_2, \dots, g_{NT} = \bar{g}_{NT}$ . O custo associado é

$$p(k) = p\left(\sum_{j=1}^{NT} \bar{g}_j\right) = \sum_{j=1}^{NT} c_j \cdot \bar{g}_j^2.$$

5. Se a demanda térmica  $k$  é tal que  $0 \leq k < \kappa_{NT}$ , determine o índice  $s$  tal que

$$\kappa_{s-1} \leq k < \kappa_s.$$

Calcule  $\lambda \in [0, 1)$  tal que  $k = (1 - \lambda) \cdot \kappa_{s-1} + \lambda \cdot \kappa_s$ . Então a solução do problema (1.2) é dada por  $(g_1, \dots, g_{NT}) = (1 - \lambda) \cdot \nu_{s-1} + \lambda \cdot \nu_s$ , ou ainda,  $g_\alpha = \bar{g}_\alpha$  para  $\alpha = 1, \dots, s-1$  e  $g_\alpha = k^{(s)} / (c_\alpha \cdot H^{(s)})$  para  $\alpha = s, \dots, NT$ , onde  $k^{(s)} = k - \sum_{r=1}^{s-1} \bar{g}_r$ . O custo associado é dado por

$$p(k) = \sum_{p=1}^{s-1} c_p \cdot (\bar{g}_p)^2 + \frac{\left(k - \sum_{r=1}^{s-1} \bar{g}_r\right)^2}{H^{(s)}}.$$

**Teorema 1.2** (VALIDAÇÃO DO ALGORITMO) O algoritmo acima de fato calcula o modo ótimo de operação das usinas térmicas. O custo

$$p: \left[0, \sum_{j=1}^{NT} \bar{g}_j\right] \rightarrow \mathbb{R}$$

definido no passo 5 do algoritmo é uma função estritamente convexa e possui derivada contínua.

*Demonstração.* O problema mais simples

$$\text{minimizar } \sum_{j=1}^{NT} c_j \cdot g_j^2 \quad \text{sujeito à restrição } \sum_{j=1}^{NT} g_j = k,$$

também possui um único mínimo que pode ser determinado via multiplicadores de Lagrange

$$\begin{aligned} 2 \cdot c_j \cdot g_j &= \lambda, \quad j = 1, \dots, NT, \\ \sum_{r=1}^{NT} g_r &= k, \end{aligned}$$

de onde

$$\lambda = \frac{k}{\frac{1}{2} \sum_{r=1}^{NT} \frac{1}{c_r}} \quad \text{e} \quad g_j = \frac{k}{c_j \sum_{r=1}^{NT} \frac{1}{c_r}}.$$

Para pequenos valores de  $k$  observe que as expressões acima para  $g_j$  satisfazem as restrições  $0 \leq g_j \leq \bar{g}_j$ , para cada  $j = 1, \dots, NT$ . Sendo assim, por unicidade do problema (1.2), o ponto

$$(k/(c_1 \cdot H), \dots, k/(c_{NT} \cdot H)), \quad \text{com } H = \sum_{r=1}^{NT} 1/c_r,$$

representa o modo ótimo de operação das usinas térmicas enquanto os  $g_j$  satisfizerem as restrições em desigualdades.

Evidentemente, em algum momento, o ponto  $(k/(c_1 \cdot H), \dots, k/(c_{NT} \cdot H))$  sairá da caixa  $C = [0, \bar{g}_1] \times \dots \times [0, \bar{g}_{NT}]$ . Como  $c_1 \cdot \bar{g}_1 \leq \dots \leq c_{NT} \cdot \bar{g}_{NT}$ , isto ocorrerá pela face  $g_1 = \bar{g}_1$  para o valor da demanda térmica igual a  $\kappa_1 = c_1 \cdot \bar{g}_1 \cdot H$ , isto é, quando a primeira usina térmica atingir sua geração máxima.

O que podemos dizer a respeito da solução para valores de  $k$  maiores do que  $\kappa_1$ ? A resposta a esta pergunta é obtida através da seguinte

**PROPRIEDADE FUNDAMENTAL.** Considere  $g(k) = (g_1(k), \dots, g_{NT}(k))$  a solução ótima para o problema (1.2). Então  $g_1(k) = \bar{g}_1$  para  $k \geq \kappa_1$ .

Com efeito, suponha por absurdo que exista  $k \geq \kappa_1$  para o qual se tenha  $g_1 = g_1(k) < \bar{g}_1$ . Neste caso vale que

$$c_1 \cdot g_1 < c_1 \cdot \bar{g}_1 \leq c_2 \cdot \bar{g}_2 \leq \dots \leq c_{NT} \cdot \bar{g}_{NT}.$$

Temos duas possibilidades:

1. Suponha que  $g_s < \bar{g}_s$  para todo  $s = 2, \dots, NT$ . Então  $c_s \cdot g_s = \lambda$  para todo  $s = 1, \dots, NT$ . Logo  $g_s = k/(c_s \cdot H)$ . Mas então  $k < c_1 \cdot \bar{g}_1 \cdot H$ , uma contradição. Para ver que  $c_s \cdot g_s = \lambda$  para todo  $s = 1, \dots, NT$  suponha, por absurdo, que existam índices  $\alpha$  e  $\beta$  tais que  $c_\alpha \cdot g_\alpha < c_\beta \cdot g_\beta$ , com  $g_\alpha < \bar{g}_\alpha$  e  $g_\beta < \bar{g}_\beta$ . Considere

$$\gamma(\epsilon) = (g_1, \dots, g_{\alpha-1}, g_\alpha + \epsilon, g_{\alpha+1}, \dots, g_{\beta-1}, g_\beta - \epsilon, g_{\beta+1}, \dots, g_{NT}).$$

Para pequenos valores de  $\epsilon$  temos que  $\gamma(\epsilon)$  é um ponto do domínio admissível. Como

$$\begin{aligned} [c_\alpha \cdot g_\alpha^2 + c_\beta \cdot g_\beta^2] - [c_\alpha \cdot (g_\alpha + \epsilon)^2 + c_\beta \cdot (g_\beta - \epsilon)^2] = \\ 2 \cdot (c_\beta \cdot g_\beta - c_\alpha \cdot g_\alpha) \cdot \epsilon - (c_\alpha + c_\beta) \epsilon^2 \end{aligned}$$

e  $c_\beta \cdot g_\beta - c_\alpha \cdot g_\alpha > 0$ , escolhendo  $0 < \epsilon < 2 \cdot (c_\beta \cdot g_\beta - c_\alpha \cdot g_\alpha) / (c_\alpha + c_\beta)$  (e suficientemente pequeno a fim de  $\gamma(\epsilon)$  esteja no domínio admissível), a expressão

$$[c_\alpha \cdot g_\alpha^2 + c_\beta \cdot g_\beta^2] - [c_\alpha \cdot (g_\alpha + \epsilon)^2 + c_\beta \cdot (g_\beta - \epsilon)^2]$$

será positiva e  $\sum_{j=1}^{NT} c_j \cdot g_j^2$  assumirá um valor menor em  $\gamma(\epsilon)$  do que em  $\gamma(0)$ , contradizendo o fato de  $\gamma(0)$  ser solução do problema (1.2).

2. Suponha que exista  $s \in \{2, \dots, NT\}$  tal que  $g_s = \bar{g}_s$ . Então  $c_1 \cdot g_1 < c_1 \cdot \bar{g}_1 \leq c_s \cdot \bar{g}_s = c_s \cdot g_s$ . Para pequenos valores de  $\epsilon$ , temos que

$$\gamma(\epsilon) = (g_1 + \epsilon, g_2, \dots, g_{s-1}, g_s - \epsilon, g_{s+1}, \dots, g_{NT})$$

é um ponto do domínio admissível. Como

$$\begin{aligned} [c_1 \cdot g_1^2 + c_s \cdot g_s^2] - [c_1 \cdot (g_1 + \epsilon)^2 + c_s \cdot (g_s - \epsilon)^2] = \\ 2 \cdot (c_s \cdot g_s - c_1 \cdot g_1) \cdot \epsilon - (c_1 + c_s) \epsilon^2 \end{aligned}$$

e  $c_s \cdot g_s - c_1 \cdot g_1 > 0$ , escolhendo  $0 < \epsilon < 2 \cdot (c_s \cdot g_s - c_1 \cdot g_1) / (c_1 + c_s)$  (e suficientemente pequeno a fim de que  $\gamma(\epsilon)$  esteja no domínio admissível), a expressão

$$[c_1 \cdot g_1^2 + c_s \cdot g_s^2] - [c_1 \cdot (g_1 + \epsilon)^2 + c_s \cdot (g_s - \epsilon)^2]$$

será positiva e  $\sum_{j=1}^{NT} c_j \cdot g_j^2$  assumirá um valor menor em  $\gamma(\epsilon)$  do que em  $\gamma(0)$ , novamente uma contradição.

É claro que o ponto ótimo  $(k/(c_1 \cdot H), \dots, k/(c_{NT} \cdot H))$  poderia interceptar mais de um plano ao sair da caixa  $C$ , digamos,  $c_1 \cdot \bar{g}_1 = c_2 \cdot \bar{g}_2 = \dots = c_s \cdot \bar{g}_s$ . Com o mesmo argumento da demonstração acima, pode-se mostrar que para  $k \geq c_1 \cdot \bar{g}_1 \cdot H = c_2 \cdot \bar{g}_2 \cdot H = \dots = c_s \cdot \bar{g}_s \cdot H$  teremos  $g_r = \bar{g}_r$ , para  $r = 1, \dots, s$ .

Com a propriedade fundamental, vamos obter uma expressão para a solução do problema para valores de  $k$  maiores do que  $\kappa_1$ . Como sabemos que  $g_1(k) = \bar{g}_1$  para  $k \geq \kappa_1$ , podemos considerar o problema

$$\text{minimizar } \sum_{r=2}^{NT} c_r \cdot g_r^2 \text{ com as restrições } \begin{cases} \sum_{r=2}^{NT} g_r = k^{(2)} = k - \bar{g}_1, \\ 0 \leq g_r \leq \bar{g}_r. \end{cases}$$

Multiplicadores de Lagrange fornecem que

$$g_r = \frac{k^{(2)}}{c_r \cdot H^{(2)}}, \text{ com } r = 2, \dots, NT \text{ e } H^{(2)} = \sum_{r=2}^{NT} \frac{1}{c_r}.$$

Agora,  $g_1 = \bar{g}_1$  e  $g_r = k^{(2)}/(c_r \cdot H^{(2)})$  constituirá uma solução para o problema (1.2) enquanto tivermos  $g_r \leq \bar{g}_r$ , para todo  $r = 2, \dots, NT$ . Escrevendo  $H^{(1)} = \sum_{r=1}^{NT} 1/c_r$ , isto vai ocorrer para valores de  $k^{(2)}$  no intervalo  $c_1 \cdot \bar{g}_1 \cdot H^{(1)} - \bar{g}_1 \leq k^{(2)} \leq c_2 \cdot \bar{g}_2 \cdot H^{(2)}$ , ou seja, para valores de  $k$  no intervalo

$$\kappa_1 = c_1 \cdot \bar{g}_1 \cdot H^{(1)} \leq k \leq \kappa_2 = \bar{g}_1 + c_2 \cdot \bar{g}_2 \cdot H^{(2)}.$$

Podemos utilizar novamente a propriedade fundamental de forma a obter que  $g_2 = \bar{g}_2$  para valores de  $k \geq \kappa_2$ . Prosseguindo-se recursivamente obtemos que no intervalo

$$I_s = [\kappa_{s-1}, \kappa_s], \quad \text{com } \kappa_0 = 0 \text{ e } \kappa_s = \sum_{r=1}^{s-1} \bar{g}_r + c_s \cdot \bar{g}_s \cdot H^{(s)},$$

para  $s = 1, \dots, NT$ , a solução para o problema (1.2) é dada por

$$\nu(k) = \left( \bar{g}_1, \dots, \bar{g}_{s-1}, \frac{k - \sum_{r=1}^{s-1} \bar{g}_r}{c_s \cdot H^{(s)}}, \dots, \frac{k - \sum_{r=1}^{s-1} \bar{g}_r}{c_{NT} \cdot H^{(s)}} \right).$$

Isto permite definir uma aplicação contínua  $\nu: \left[0, \sum_{j=1}^{NT} \bar{g}_j\right] \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^{NT}$  que, a cada  $k \in [\kappa_{s-1}, \kappa_s] \subset \left[0, \sum_{r=1}^{NT} \bar{g}_r\right]$ , associa o modo ótimo de operação  $\nu(k)$  das usinas térmicas.



Seja agora  $\lambda \in [0, 1]$  tal que  $k = (1 - \lambda) \cdot \kappa_{s-1} + \lambda \cdot \kappa_s$ . Vamos mostrar que  $\nu(k) = (1 - \lambda) \cdot \nu(\kappa_{s-1}) + \lambda \cdot \nu(\kappa_s)$ . Basta observar que  $\bar{g}_p = (1 - \lambda) \cdot \bar{g}_p + \lambda \cdot \bar{g}_p$  e

$$\begin{aligned} k - \sum_{r=1}^{s-1} \bar{g}_r &= (1 - \lambda) \cdot \kappa_{s-1} + \lambda \cdot \kappa_s - \sum_{r=1}^{s-1} \bar{g}_r \\ &= (1 - \lambda) \cdot \left( \kappa_{s-1} - \sum_{r=1}^{s-1} \bar{g}_r \right) + \lambda \cdot \left( \kappa_s - \sum_{r=1}^{s-1} \bar{g}_r \right). \end{aligned}$$

Finalmente, o custo para a configuração ótima das usinas térmicas é

$$\begin{aligned} p(k) &= \sum_{r=1}^{NT} c_j \cdot (g_r(k))^2 \\ &= \sum_{p=1}^{s-1} c_p \cdot (\bar{g}_p)^2 + \sum_{p=s}^{NT} c_p \cdot \left( \frac{k - \sum_{r=1}^{s-1} \bar{g}_r}{c_p \cdot H^{(s)}} \right)^2 \\ &= \sum_{p=1}^{s-1} c_p \cdot (\bar{g}_p)^2 + \left( \frac{k - \sum_{r=1}^{s-1} \bar{g}_r}{H^{(s)}} \right)^2 \sum_{p=s}^{NT} \frac{1}{c_r} \\ &= \sum_{p=1}^{s-1} c_p \cdot (\bar{g}_p)^2 + \frac{\left( k - \sum_{r=1}^{s-1} \bar{g}_r \right)^2}{H^{(s)}}. \end{aligned}$$

Claramente  $p$  é suave para valores de  $k$  em  $\left[ 0, \sum_{j=1}^{NT} \bar{g}_j \right] - \{\kappa_1, \dots, \kappa_{NT-1}\}$ . Resta mostrar que as derivadas laterais de  $p$ , para  $k \in \{\kappa_1, \dots, \kappa_{NT-1}\}$ , existem e são iguais. Temos

$$\begin{aligned} \lim_{k \rightarrow \kappa_s^-} \frac{p(k) - p(\kappa_s)}{k - \kappa_s} &= \lim_{k \rightarrow \kappa_s^-} \frac{1}{k - \kappa_s} \cdot \left( \frac{\left( k - \sum_{r=1}^{s-1} \bar{g}_r \right)^2}{H^{(s)}} - \frac{\left( \kappa_s - \sum_{r=1}^{s-1} \bar{g}_r \right)^2}{H^{(s)}} \right) \\ &= 2 \cdot \frac{\kappa_s - \sum_{r=1}^{s-1} \bar{g}_r}{H^{(s)}}. \end{aligned}$$

Lembrando que  $\kappa_s = \sum_{r=1}^{s-1} \bar{g}_r + c_s \cdot \bar{g}_s \cdot H^{(s)}$  segue-se que

$$\lim_{k \rightarrow \kappa_s^-} \frac{p(k) - p(\kappa_s)}{k - \kappa_s} = 2 \cdot c_s \cdot \bar{g}_s.$$

Analogamente, como  $\kappa_s = \sum_{r=1}^s \bar{g}_r + c_s \cdot \bar{g}_s \cdot H^{(s+1)}$ , temos

$$\lim_{k \rightarrow \kappa_s^+} \frac{p(k) - p(\kappa_s)}{k - \kappa_s} = \lim_{k \rightarrow \kappa_s^+} \frac{p(k) - p(\kappa_s)}{k - \kappa_s} = 2 \cdot \frac{\kappa_s - \sum_{r=1}^s \bar{g}_r}{H^{(s+1)}} = 2 \cdot c_s \cdot \bar{g}_s.$$

Observe que a função  $p$  é definida como a “colagem  $C^1$ ” das várias parábolas

$$P_s(k) = \sum_{p=1}^{s-1} c_p \cdot (\bar{g}_p)^2 + \frac{\left(k - \sum_{r=1}^{s-1} \bar{g}_r\right)^2}{H(s)}, \quad \text{com } k \in [\kappa_{s-1}, \kappa_s].$$

Em outras palavras,  $p|_{[\kappa_{s-1}, \kappa_s]} = P_s$ . Logo,  $p$  é estritamente convexa pois sua derivada segunda no intervalo  $(\kappa_{s+1}, \kappa_{s+2})$  é sempre maior do que no intervalo  $(\kappa_s, \kappa_{s+1})$ . ■

Existe um algoritmo que resolve problema (1.2) com complexidade  $O(n)$  (veja [23]). O gráfico (a) da figura (1.2) representa a função  $p$  para o caso de El Cajón em Honduras com

$$\begin{array}{llll} c_1 = 3.024 \cdot 10^{-3}, & c_2 = 3.599 \cdot 10^{-3}, & \bar{g}_1 = 12.0, & \bar{g}_2 = 12.0, \\ c_3 = 6.188 \cdot 10^{-3}, & c_4 = 4.243 \cdot 10^{-3}, & \bar{g}_3 = 4.4, & \bar{g}_4 = 12.0, \\ c_5 = 1.503 \cdot 10^{-3}, & c_6 = 6.751 \cdot 10^{-4}, & \bar{g}_5 = 25.0, & \bar{g}_6 = 39.5, \\ c_7 = 2.239 \cdot 10^{-4}, & c_8 = 3.006 \cdot 10^{-4}, & \bar{g}_7 = 80.0, & \bar{g}_8 = 80.0. \end{array}$$

O gráfico (b) da figura (1.2) representa os vários polinômios que justapostos descrevem o gráfico do custo  $p$ .

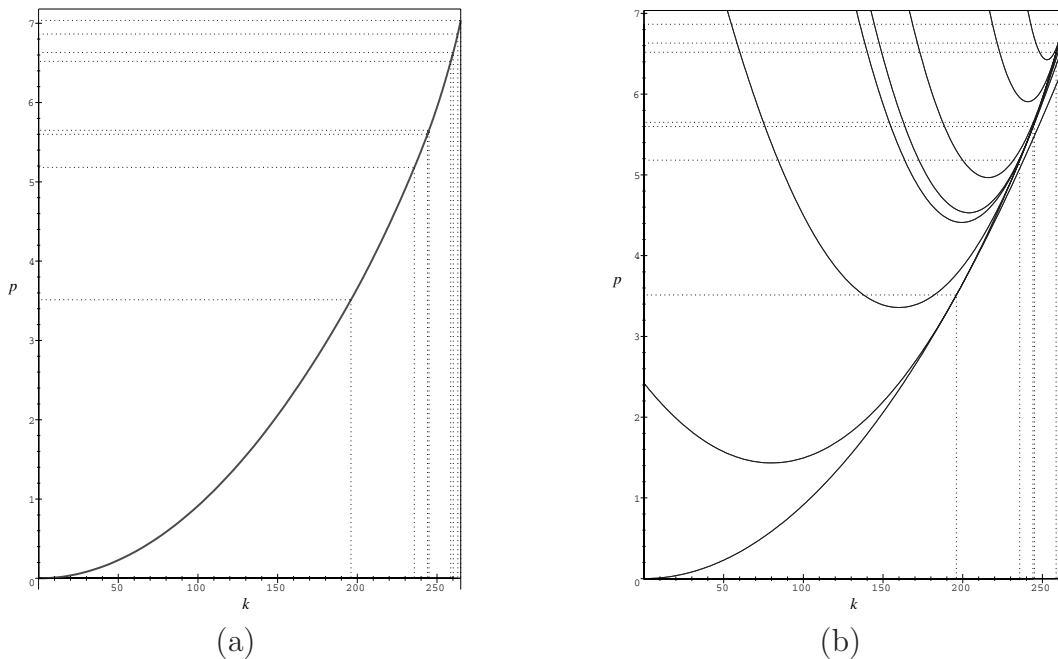


Figura 1.2: Gráfico de  $p$  para o sistema de El Cajón.

### 1.3 A formulação discreta $M_{NS}$

Com a solução do problema de operação ótima das usinas térmicas em termos da demanda térmica  $k_t$ , podemos reescrever o problema original de operação hidrotérmica da seguinte maneira:

#### Problema 1.3 ( $M_{NS}$ )

$$\text{minimizar } \sum_{t=1}^{NS} p(k_t) \cdot \Delta\tau \quad (1.1)$$

sujeito às condições

$$0 \leq k_t = d_t - h_t = d_t - \rho(v_t) \cdot q_t, \quad (1.2)$$

$$v_{t+1} = v_t + b_t \cdot \Delta\tau - q_t \cdot \Delta\tau - s_t \cdot \Delta\tau, \quad (1.3)$$

$$0 \leq q_t \leq \bar{q}, \quad \underline{v} \leq v_t \leq \bar{v}, \quad 0 \leq s_t, \quad (1.4)$$

nas variáveis de controle  $q_t$  e  $s_t$ . Um par admissível de controles  $(q_t, s_t)$ , para  $t = a, \dots, b$ , será denominado uma *operação* no intervalo  $[a, b]$ .

Aqui, estamos supondo que as usinas térmicas possam sempre atender toda a demanda caso necessário, isto é, estamos supondo que  $k_t \leq \sum_{j=1}^{NT} \bar{g}_j$  para todo  $t = 1, \dots, NS$ . Lembramos que, pelo teorema (1.2),  $p$  é uma função estritamente convexa com derivada contínua.

### 1.4 Um exemplo: o sistema El Cajón

O sistema El Cajón em Honduras possui uma usina hidroelétrica e oito usinas térmicas. A função custo  $p$  associada às usinas térmicas é dada na figura (1.2). A usina hidroelétrica possui as seguintes especificações:  $\underline{v} = 1.6841 \cdot 10^9 \text{ m}^3$ ,  $\bar{v} = 5.62527 \cdot 10^9 \text{ m}^3$  e  $\bar{q} = 204.8 \text{ m}^3/\text{s}$ .

Os cálculos numéricos foram feitos para um período de quatro anos, divididos em  $NS = 48$  meses. Os valores mensais de afluência e demanda são dados na figura (1.3). O volume inicial do reservatório é  $v_0 = 4.85898 \cdot 10^9 \text{ m}^3$ , e o coeficiente de produção foi modelado pela função

$$\rho(x) = 2.17576 \cdot 10^{-5} \sqrt{x} \text{ MW}/\text{m}^3/\text{s}.$$

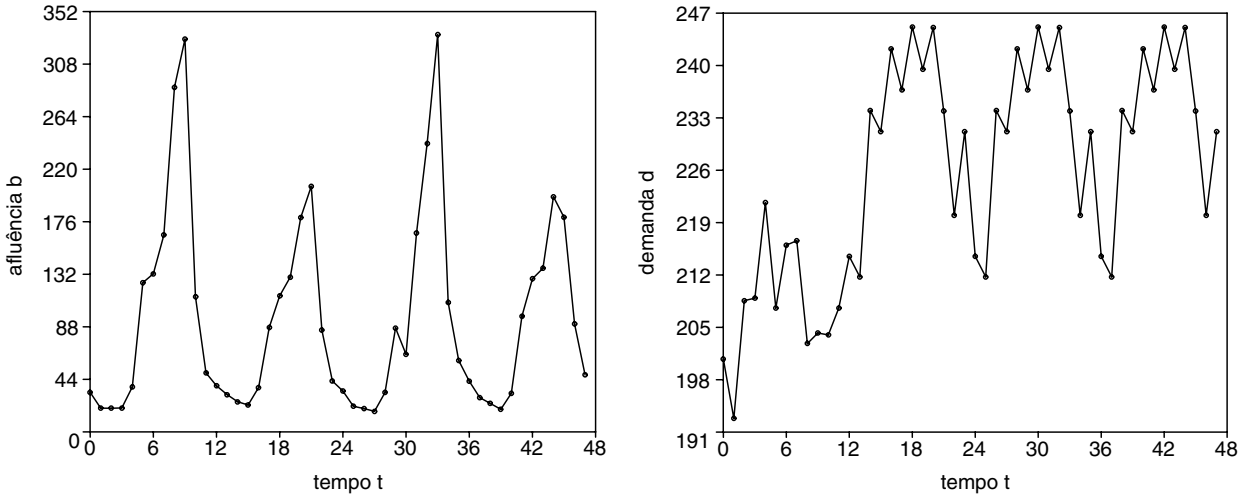


Figura 1.3: Valores mensais, durante um período de quatro anos, da afluência e demanda para o sistema El Cajón.

Com uma combinação de técnicas de otimização convencionais (*Aitken double sweep*, *steepest descent* e gradiente projetado [22]), conseguimos uma operação admissível de  $M_{48}$  cujos turbinamentos  $q_t$  estão indicados na figura (1.4) (a). Turbinamento máximo  $\bar{q}$  ocorre apenas no último estágio. Não existem vertimentos nesta operação. O custo total é de  $4.938 \cdot 10^7$  unidades monetárias. A figura (1.4) (b) descreve os volumes  $v_1, \dots, v_{49}$  correspondentes. No final do estágio 11, o reservatório está cheio.

As gerações da usina hidroelétrica  $h_t = \rho(v_t) \cdot q_t$  estão representadas pela curva inferior na figura (1.4) (c). Em nenhum estágio, a usina hidroelétrica é desativada. A curva superior corresponde às gerações necessárias para produzir toda a demanda (com custo zero). Finalmente, a demanda térmica  $k_t = d_t - \rho(v_t) \cdot q_t$  é dada na figura (1.4) (d).

Note que as curvas na figura (1.4) (c) são quase paralelas durante certos intervalos de tempo, nos quais, equivalentemente, o gráfico da demanda térmica  $k(t)$  é quase constante. Este fato será explicado pela caracterização da operação ótima para a versão contínua do problema de planejamento hidrotérmico. Observe a semelhança com o seguinte problema: a solução de

$$\text{minimizar } \sum_{t=1}^{NS} p(k_t) \cdot \Delta\tau \text{ sujeito a } \sum_{t=1}^{NS} k_t = C = \text{constante},$$

é equidistribuído no tempo:

$$k_1 = \dots = k_{NS} = \frac{C}{NS},$$

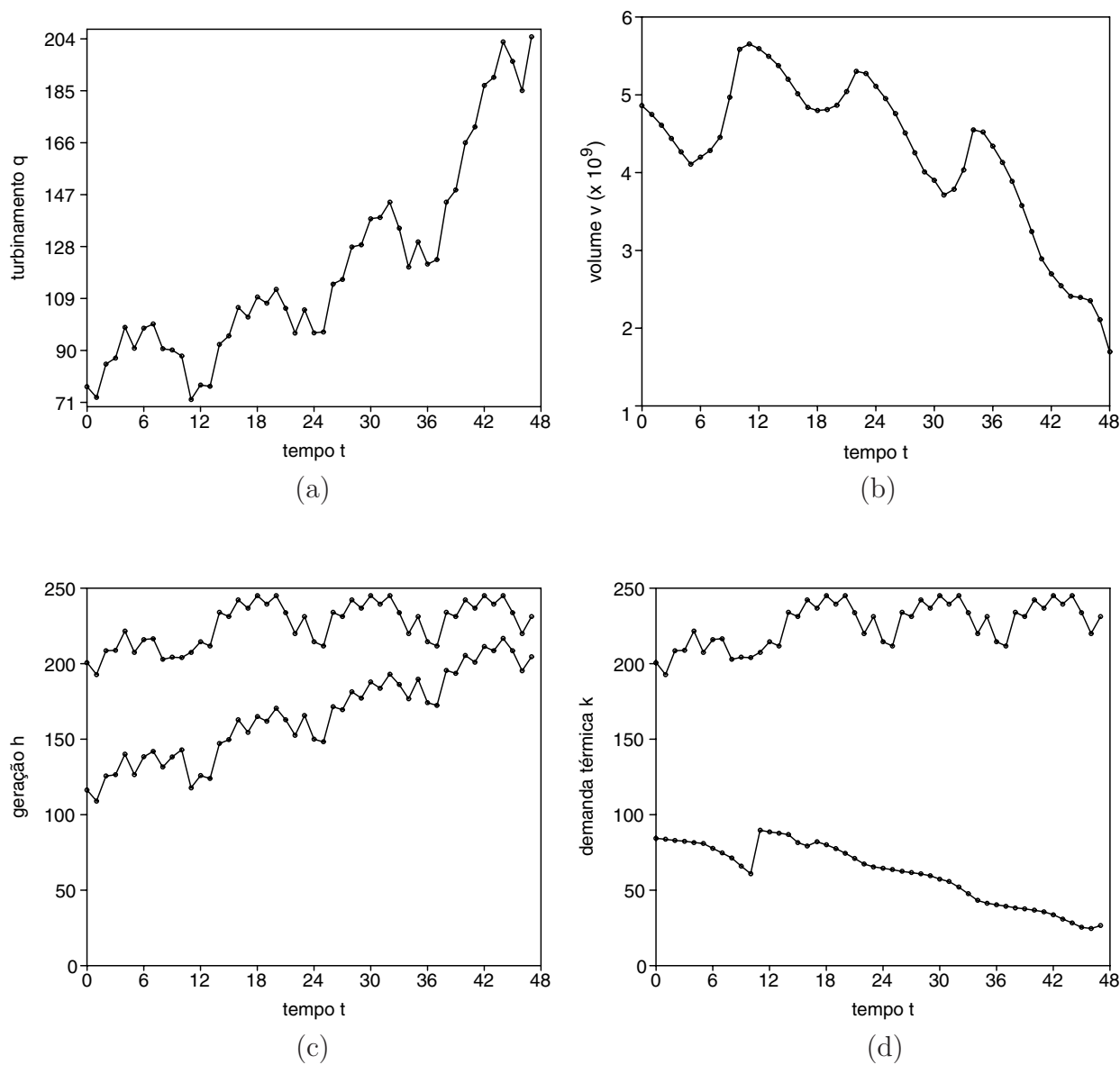


Figura 1.4: Uma operação quase-ótima para  $M_{48}$ : (a) turbinamentos, (b) volumes, (c) gerações da usina hidroelétrica e (d) demandas térmicas.

se a função  $p$  é estritamente convexa. De fato, como veremos mais adiante, quando a afluência é identicamente zero num intervalo de tempo, uma operação ótima no interior do conjunto admissível deve possuir demanda térmica constante. Se a afluência é positiva, como no exemplo de El Cajón, operações ótimas no interior do conjunto admissível são tais que a demanda térmica correspondente decresce com o tempo.

Mostraremos no capítulo 5 que a operação apresentada na figura (1.4) é, de fato, uma aproximação da operação ótima da versão contínua do exemplo de El Cajón.

# Capítulo 2

## O modelo contínuo $M_\infty$

### 2.1 As variáveis de controle $q$ e $s$

Em  $M_{NS}$ , o intervalo  $[0, T]$  é dividido em  $NS$  subintervalos de mesmo tamanho. Fazendo  $NS \rightarrow \infty$ , esperamos encontrar as versões contínuas  $q$ ,  $s$ ,  $b$ ,  $d$  e  $v$ , definidas no intervalo  $[0, T]$ , análogas às variáveis discretas correspondentes: elas são, respectivamente, o turbinamento, vertimento, afluência e demanda (por unidade de tempo) e o volume (no tempo  $t$ ).

Em particular, a versão contínua da equação de balanço hídrico relaciona  $v$  com as integrais das primeiras três variáveis (veja a tabela (2.1)). É conveniente interpretar  $q$ ,  $s$ ,  $d$  e  $v$  como derivadas distribucionais ou, melhor ainda, como medidas sobre a reta. Lembramos que toda medida finita na reta decompõe-se de maneira única em três pedaços do seguinte tipo [32]: uma soma (possivelmente enumerável) de deltas em pontos diferentes da reta cujos pesos em módulo somam um número real, uma medida absolutamente contínua (isto é, uma medida da forma  $f(t) dt$  para alguma função integrável  $f$ ) e uma medida singularmente contínua. Por razões de modelagem, vamos eliminar a possibilidade de deltas. Mais ainda, vamos assumir que  $q$ ,  $s$ ,  $d$  e  $b$  são funções limitadas:

$$0 \leq q(t) \leq \bar{q}, \quad 0 \leq s(t) \leq \bar{s}, \quad 0 \leq d(t) \leq \bar{d}, \quad 0 \leq b(t) \leq \bar{b}, \quad t \in [0, T].$$

Vamos também impor que as partes singularmente contínuas destas variáveis sejam iguais a zero. Assim, as funções  $q$ ,  $s$ ,  $d$  e  $b$  são derivadas de suas integrais e o teorema fundamental do cálculo, uma lei de conservação que queremos manter, vale para cada uma delas. Da versão contínua da equação

MODELO DISCRETO	MODELO CONTÍNUO
minimizar $\sum_{t=1}^{NS} p(k_t) \Delta\tau$	minimizar $\int_0^T p(k(t)) dt$
$k_t = d_t - \rho(v_t) q_t$	$k(t) = d(t) - \rho(v(t)) q(t)$
$\frac{v_{t+1} - v_t}{\Delta\tau} = b_t - q_t - s_t$	$v'(t) = b(t) - q(t) - s(t)$
$\underline{v} \leq v_t \leq \bar{v}$	$\underline{v} \leq v(t) \leq \bar{v}$
$0 \leq q_t \leq \bar{q}$	$0 \leq q(t) \leq \bar{q}$
$0 \leq s_t \leq \bar{s}$	$0 \leq s(t) \leq \bar{s}$

Tabela 2.1: Modelo discreto  $\times$  modelo contínuo.

de balanço hídrico, concluímos então que o volume  $v$  é uma função absolutamente contínua, com um valor inicial  $v(0)$  dado.

### Problema 2.1 ( $M_\infty$ )

$$\text{Minimizar } \int_0^T p(d(t) - \rho(v(t)) \cdot q(t)) dt,$$

sujeito às restrições

$$\begin{aligned} 0 \leq k(t) &= d(t) - \rho(v(t)) \cdot q(t), \\ v'(t) &= b(t) - q(t) - s(t), && \text{(equação de balanço hídrico)} \\ 0 \leq q(t) \leq \bar{q}, \quad \underline{v} \leq v(t) \leq \bar{v}, \quad 0 \leq s(t) \leq \bar{s}, \end{aligned}$$

nas variáveis de controle  $q$  e  $s$ .

Um par admissível de controles  $(q, s) \in L_\infty([t_0, t_1]) \times L_\infty([t_0, t_1])$  será denominado uma *operação* no intervalo  $[t_0, t_1]$ .



## 2.2 A existência de uma operação ótima para $M_\infty$

O funcional custo a ser minimizado é da forma

$$k \mapsto C(k) = \int_0^T p(k(t)) dt,$$

onde, pelo teorema (1.2), a função  $p$  é convexa e satisfaz  $0 \leq p'(x) \leq A \cdot x$ , para alguma constante  $A > 0$  e para todo  $x \geq 0$ . Apesar de  $p$  ser convexa, observe que para os controles  $q$  e  $s$ , a composição

$$(q, s) \mapsto k(q, s) = d - \rho(v) \cdot q \mapsto C(k(q, s))$$

não é convexa.

**Teorema 2.1** O modelo  $M_\infty$  admite uma solução admissível ótima.

*Demonstração.* Para o problema  $M_{NS}$ , a existência de um extremo global é garantida pelo teorema de Weierstrass. Infelizmente, no caso contínuo, onde os espaços são de dimensão infinita, as condições do conjunto admissível ser fechado e limitado não implicam em compacidade. Teremos então que usar outros recursos para garantir a existência de uma solução para  $M_\infty$ . No caso, usaremos argumentos de convergência fraca.

Inicialmente, estabeleceremos a continuidade da função-objetivo considerando-a no espaço das demandas térmicas (passo 1). A seguir, mostraremos que o conjunto determinado pelas restrições do problema é não-vazio (passo 2) e que o funcional que queremos minimizar apresenta, assim, um ínfimo neste conjunto. De posse desta informação, construiremos uma seqüência de operações admissíveis  $(q_n, s_n)$  para a qual a seqüência de custos  $o(k(q_n, s_n))$  converge para este ínfimo. Mostraremos então que existem subseqüências  $k_{n_j}$ ,  $q_{n_j}$  e  $s_{n_j}$  que convergem *fracamente* para as funções  $k_\infty$ ,  $q_\infty$  e  $s_\infty$  (passos 3 e 4) e subseqüências  $v_{n_j}$  que convergem *uniformemente* para  $v_\infty$  (passo 5). Mais ainda, mostraremos que  $k_\infty$  está associado ao modo de operação admissível  $(q_\infty, s_\infty)$  (passo 6). A partir daí, verificaremos que o funcional que queremos minimizar, avaliado em  $k_\infty$ , é igual ao seu ínfimo no conjunto admissível (passo 7) e, assim, estabeleceremos a existência de uma solução para o problema contínuo  $M_\infty$ .

PASSO 1. A função objetivo é contínua no espaço das demandas térmicas.

De acordo com o teorema (1.2), a função  $p$  é de classe  $C^1$  e, por isso, podemos escrever que

$$p(x) - p(y) = \int_0^1 p'(tx + (1-t)y) dt, \quad \forall x, y \in \mathbb{R}. \quad (\text{Hadamard})$$

Seja  $o$  o funcional  $k \mapsto \int_0^T p(k(t)) dt$  e sejam  $f$  e  $g$  funções em  $L_2([0, T])$ . Temos que

$$\begin{aligned} |o(f) - o(g)| &= \left| \int_0^T [p(f(t)) - p(g(t))] dt \right| \\ &= \left| \int_0^T [f(t) - g(t)] \left( \int_0^1 p'(\tau f(t) + (1-\tau)g(t)) d\tau \right) dt \right| \\ &\leq \int_0^T |f(t) - g(t)| \left| \int_0^1 p'(\tau f(t) + (1-\tau)g(t)) d\tau \right| dt. \quad (2.1) \end{aligned}$$

Mas

$$\left| \int_0^1 p'(\tau f(t) + (1-\tau)g(t)) d\tau \right| \leq \int_0^1 |p'(\tau f(t) + (1-\tau)g(t))| d\tau$$

e a função  $p$  satisfaz

$$|p'(x)| \leq A|x|.$$

Sendo assim, vale que

$$\begin{aligned} \left| \int_0^1 p'(\tau f(t) + (1-\tau)g(t)) d\tau \right| &\leq \int_0^1 A |(\tau f(t) + (1-\tau)g(t))| d\tau \\ &\leq \int_0^1 A \tau |f(t) - g(t)| d\tau + \int_0^1 A |g(t)| d\tau \\ &= \frac{A}{2} |f(t) - g(t)| + A |g(t)|. \quad (2.2) \end{aligned}$$

A partir das desigualdades (2.1) e (2.2), concluimos então que

$$\begin{aligned}
|o(f) - o(g)| &\leq \int_0^T \left[ \frac{A}{2} |f(t) - g(t)|^2 + A |g(t)| |f(t) - g(t)| \right] dt \\
&= \frac{A}{2} \int_0^T |f(t) - g(t)|^2 dt + A \int_0^T |g(t)| |f(t) - g(t)| dt \\
&= \frac{A}{2} \|f - g\|_2^2 + A \int_0^T |g(t)| |f(t) - g(t)| dt.
\end{aligned}$$

Pela desigualdade de Cauchy-Schwarz,

$$\int_0^T |g(t)| |f(t) - g(t)| dt \leq \left( \int_0^T |g(t)|^2 dt \right)^{1/2} \left( \int_0^T |f(t) - g(t)|^2 dt \right)^{1/2}.$$

Conseqüentemente,

$$|o(f) - o(g)| \leq \frac{A}{2} \|f - g\|_2^2 + A \|g\|_2 \|f - g\|_2. \quad (2.3)$$

Desta maneira, se  $f$  tende a  $g$  na norma do  $L_2([0, T])$ , então  $|o(f) - o(g)|$  tende a zero. Isto nos mostra que  $o$  é uma função contínua em  $L_2([0, T])$ .

PASSO 2. O conjunto admissível é não-vazio.

Basta observa que  $q = 0$  e  $s = b$  constitui uma operação admissível.

Uma vez que a função  $p$  é limitada inferiormente, o funcional  $o(k)$  apresenta um ínfimo no conjunto admissível  $E \subset L_\infty([0, T]) \times L_\infty([0, T])$  de  $M_\infty$ . Sendo assim, é possível construir uma seqüência de operações admissíveis  $(q_n, s_n) \in L_\infty([0, T]) \times L_\infty([0, T])$ , à qual corresponde uma seqüência de demandas térmicas

$$k_n = d - \rho \left( v(a) + \int_0^t b(\tau) d\tau - \int_0^t s_n(\tau) d\tau - \int_0^t q_n(\tau) d\tau \right) q_n$$

em  $L_\infty[0, T]$ , tal que

$$o(k_n) \rightarrow c = \inf_E o(k(q, s)).$$

PASSO 3. Existe uma subseqüência  $k_{n_j}$  que converge fracamente para uma função  $k_\infty$ .

Como  $o(k_n)$  é uma seqüência de números reais convergente, temos que  $o(k_n) \leq M$ , para alguma constante real  $M$ . A partir das propriedades da

função custo  $p$  (veja o teorema (1.2)), podemos escrever que

$$p(k_n(t)) \geq A (k_n(t))^2 + B,$$

com  $A$  e  $B$  constantes reais. Integrando-se de 0 a  $T$ , vemos que

$$\int_0^T p(k_n(t)) dt \geq A \int_0^T (k_n(t))^2 dt + \int_0^T B dt.$$

Assim,  $o(k_n) \geq A \|k_n\|_2^2 + BT$  e, então,

$$\|k_n\|_2^2 \leq \frac{o(k_n) - BT}{A} \leq \frac{M - BT}{A}.$$

Isto nos mostra que a seqüência  $k_n$  é uniformemente limitada em  $L_2([0, T])$ .

Induzida por esta seqüência  $k_n$ , existe no espaço dual  $(L_2([0, T]))^*$  uma seqüência  $\varphi_{k_n}$  de funcionais lineares definida por

$$\varphi_{k_n}(f) = \int_0^T k_n(t) f(t) dt.$$

Mais ainda, para todo  $n \in \mathbb{N}$ , vale que

$$\|k_n\|_2 = \|\varphi_{k_n}\|.$$

Deste modo,  $\varphi_{k_n}$  é uma seqüência limitada em  $(L_2([0, T]))^*$  e, portanto, podemos aplicar o teorema de Banach-Alaoglu [21] para ela: a bola fechada que a seqüência  $\varphi_{k_n}$  é compacta na topologia fraca-\*. Desta maneira, existe uma subsequência  $\varphi_{k_{n_j}}$  que converge fraca-\* para um funcional linear  $\tilde{\varphi}$  em  $(L_2([0, T]))^*$ . Em outras palavras, para todo  $f \in L_2([0, T])$ ,

$$\varphi_{k_{n_j}}(f) \rightarrow \tilde{\varphi}(f).$$

Mas, pelo teorema de representação de Riesz [01], existe  $k_\infty \in L_2([0, T])$  tal que

$$\tilde{\varphi}(f) = \varphi_{k_\infty}(f) = \int_0^T k_\infty(t) f(t) dt$$

para todo  $f \in L_2([0, T])$ . Conseqüentemente,

$$\int_0^T k_{n_j}(t) f(t) dt \rightarrow \int_0^T k_\infty(t) f(t) dt,$$

para todo  $f \in L_2([0, T])$  e, portanto,

$$\varphi_f(k_{n_j}) \rightarrow \varphi_f(k_\infty),$$

para todo  $f \in L_2([0, T])$ . Isto nos mostra que  $k_{n_j}$  converge fracamente para  $k_\infty \in L_2([0, T])$ .

Vamos definir agora as funções

$$Q_n(t) = \int_0^t q_n(\tau) d\tau \quad \text{e} \quad S_n(t) = \int_0^t s_n(\tau) d\tau. \quad (2.4)$$

Temos que

$$|Q_n(t)| = \left| \int_0^t q_n(\tau) d\tau \right| \leq \int_0^t |q_n(\tau)| d\tau \leq \bar{q}T$$

e

$$|S_n(t)| = \left| \int_0^t s_n(\tau) d\tau \right| \leq \int_0^t |s_n(\tau)| d\tau \leq \bar{s}T,$$

de onde concluímos que as seqüências  $Q_n$  e  $S_n$  são uniformemente limitadas. É fácil de ver que estas seqüências também são equicontínuas, pois

$$Q_n(t) - Q_n(t_0) \leq \int_{t_0}^t q_n(\tau) d\tau \leq \bar{q}(t - t_0)$$

e

$$S_n(t) - S_n(t_0) \leq \int_{t_0}^t s_n(\tau) d\tau \leq \bar{s}(t - t_0).$$

Assim, pelo teorema de Arzelá-Ascoli [19], existem subsequências  $Q_{n_j}$  e  $S_{n_j}$  que convergem (na norma de  $L_\infty([0, T])$ ) para  $Q_\infty$  e  $S_\infty$ , respectivamente.

Como cada função  $Q_n$  e  $S_n$  é monótona, segue-se que  $Q_\infty$  e  $S_\infty$  também são monótonas e, portanto, deriváveis em quase todo ponto. Defina então

$$q_\infty(t) = Q'_\infty(t) \quad \text{e} \quad s_\infty(t) = S'_\infty(t).$$

Para que as equações (2.4) sejam válidas também para  $n = \infty$ , precisamos garantir que  $Q_\infty$  e  $S_\infty$  são funções absolutamente contínuas, isto é, devemos mostrar que dado  $\epsilon > 0$ , existe  $\delta > 0$  tal que para toda coleção finita  $\{(a_j, b_j)\}_{j=1, \dots, m}$  de intervalos disjuntos satisfazendo

$$\sum_{j=1}^m |b_j - a_j| < \delta,$$

tem-se

$$\sum_{j=1}^m |Q_\infty(b_j) - Q_\infty(a_j)| < \epsilon \quad \text{e} \quad \sum_{j=1}^m |S_\infty(b_j) - S_\infty(a_j)| < \epsilon.$$

Vejam os casos das funções  $Q_\infty$ . Sabemos que

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^m |Q_\infty(b_j) - Q_\infty(a_j)| &\leq \sum_{j=1}^m |Q_\infty(b_j) - Q_n(b_j)| \\ &\quad + \sum_{j=1}^m |Q_n(b_j) - Q_n(a_j)| + \sum_{j=1}^m |Q_n(a_j) - Q_\infty(a_j)|. \end{aligned} \quad (2.5)$$

Mas, para todo  $n \in \mathbb{N}$ , vale que

$$|Q_n(b_j) - Q_n(a_j)| \leq \bar{q} |b_j - a_j|,$$

e, portanto,

$$\sum_{j=1}^m |Q_n(b_j) - Q_n(a_j)| \leq \bar{q} \sum_{j=1}^m |b_j - a_j| \leq \bar{q} \delta.$$

Tomando  $\delta = \frac{\epsilon}{3\bar{q}}$ , concluímos que

$$\sum_{j=1}^m |Q_n(b_j) - Q_n(a_j)| \leq \frac{\epsilon}{3}. \quad (2.6)$$

Por outro lado, para  $n$  suficiente grande,

$$\sum_{j=1}^m |Q_\infty(b_j) - Q_n(b_j)| < \frac{\epsilon}{3} \quad (2.7)$$

e

$$\sum_{j=1}^m |Q_n(a_j) - Q_\infty(a_j)| < \frac{\epsilon}{3}. \quad (2.8)$$

Substituindo as expressões (2.6), (2.7) e (2.8) em (2.5), obtemos que

$$\sum_{j=1}^m |Q_\infty(b_j) - Q_\infty(a_j)| < \frac{\epsilon}{3} + \frac{\epsilon}{3} + \frac{\epsilon}{3} = \epsilon.$$

Isto nos mostra que as funções  $Q_\infty$  são absolutamente contínuas. O mesmo argumento pode ser usado para mostrar que as funções  $S_\infty$  também são absolutamente contínuas.

PASSO 4. Existem subsequências  $q_{n_j}$  e  $s_{n_j}$  que convergem fracamente para funções  $q_\infty$  e  $s_\infty$ , respectivamente.

Uma vez que existem subsequências  $Q_{n_j}$  e  $S_{n_j}$  que convergem respectivamente para  $Q_\infty$  e  $S_\infty$ , podemos dizer que existem subsequências  $q_{n_j}$  e  $s_{n_j}$  tais que

$$\int_0^t q_{n_j}(\tau) d\tau \rightarrow \int_0^t q_\infty(\tau) d\tau \quad \text{e} \quad \int_0^t s_{n_j}(\tau) d\tau \rightarrow \int_0^t s_\infty(\tau) d\tau.$$

Como as funções características geram um subconjunto denso em  $L_2([0, T])$ , podemos concluir que  $q_{n_j}$  e  $s_{n_j}$  convergem fracamente para  $q_\infty$  e  $s_\infty$ , respectivamente.

PASSO 5. Existe subsequência  $v_{n_j}$  que converge uniformemente para  $v_\infty$ .

Considere o modo  $(q_{n_j}, s_{n_j})$  no conjunto admissível de  $M_\infty$ . Pela equação de balanço hídrico, temos que

$$v_{n_j}(t) = v(0) + \int_0^t b(\tau) d\tau - Q_{n_j}(t) - S_{n_j}(t).$$

Como  $Q_{n_j} \rightarrow Q_\infty$  e  $S_{n_j} \rightarrow S_\infty$ , segue-se que  $v_{n_j}$  converge uniformemente para

$$v_\infty(t) = v(0) + \int_0^t b(\tau) d\tau - Q_\infty(t) - S_\infty(t) \leq \bar{v}.$$

PASSO 6. O modo de operação  $(q_\infty, s_\infty)$  é admissível.

1. O modo  $(q_\infty, s_\infty)$  satisfaz a restrição  $\underline{v} \leq v_\infty(t) \leq \bar{v}$ .

Como o modo  $(q_{n_j}, s_{n_j})$  é admissível,  $\underline{v} \leq v_{n_j} \leq \bar{v}$ . E já que  $v_{n_j}$  converge uniformemente para  $v_\infty$  (passo 5), concluímos que  $\underline{v} \leq v_\infty \leq \bar{v}$ .

2. O modo  $(q_\infty, s_\infty)$  satisfaz as restrições  $0 \leq q_\infty(t) \leq \bar{q}$  e  $0 \leq s_\infty(t) \leq \bar{s}$ .

Uma vez que as funções  $Q_\infty$  e  $S_\infty$  são não-decrescentes, vale que

$$q_\infty = Q'_\infty \geq 0 \quad \text{e} \quad s_\infty = S'_\infty \geq 0.$$

Para mostrar que, para todo  $t \in [0, T]$ , tem-se  $q_\infty(t) \leq \bar{q}$  suponha, por absurdo, que exista  $t_0 \in [0, T]$  tal que

$$q_\infty(t_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{Q_\infty(t_0 + h) - Q_\infty(t_0)}{h} > \bar{q}.$$

Sendo assim, para todo  $h > 0$  suficientemente pequeno, concluímos que

$$Q_\infty(t_0 + h) - Q_\infty(t_0) > (\bar{q} + \epsilon) \cdot h.$$

Portanto, é possível encontrar um índice  $n \in \mathbb{N}$  tal que

$$\int_{t_0}^{t_0+h} q_n(\tau) d\tau = Q_n(t_0 + h) - Q_n(t_0) > (\bar{q} + \epsilon) \cdot h.$$

Por outro lado, como  $q_n(t) \leq \bar{q}$  para todo  $t \in [0, T]$ , temos que

$$\int_{t_0}^{t_0+h} q_n(\tau) d\tau \leq \bar{q} \cdot h,$$

o que é uma contradição. Desta maneira, devemos ter  $q_\infty \leq \bar{q}$ . O mesmo argumento pode ser usado para mostrar que  $s_\infty \leq \bar{s}$ .



3. O modo  $(q_\infty, s_\infty)$  satisfaz a restrição  $k_\infty(t) \geq 0$ .

Considere a subsequência de demandas térmicas  $k_{n_j}$  definida por

$$k_{n_j}(t) = d(t) - \rho \left( v(0) + \int_0^t b(\tau) d\tau - \int_0^t q_{n_j}(\tau) d\tau - \int_0^t s_{n_j}(\tau) d\tau \right) q_{n_j}(t).$$

Uma vez que  $q_{n_j}$  e  $s_{n_j}$  convergem fracamente para  $q_\infty$  e  $s_\infty$  (passo 4), vamos mostrar que  $k_{n_j}$  converge fracamente para  $\tilde{k}_\infty$ , definida por

$$\tilde{k}_\infty(t) = d(t) - \rho \left( v(0) + \int_0^t b(\tau) d\tau - \int_0^t q_\infty(\tau) d\tau - \int_0^t s_\infty(\tau) d\tau \right) q_\infty(t).$$

Para isto, devemos mostrar que

$$\int_0^T \varphi(\tau) \rho(v_{n_j}(\tau)) q_{n_j}(\tau) d\tau \rightarrow \int_0^T \varphi(\tau) \rho(v_\infty(\tau)) q_\infty(\tau) d\tau,$$

para todo  $\varphi \in (L_2([0, T]))^*$ , isto é, que

$$\int_0^T (\varphi(\tau) \rho(v_{n_j}(\tau)) q_{n_j}(\tau) - \varphi(\tau) \rho(v_\infty(\tau)) q_\infty(\tau)) d\tau \rightarrow 0,$$

ou ainda, que

$$\begin{aligned} \int_0^T \varphi(\tau) \rho(v_\infty(\tau)) (q_{n_j}(\tau) - q_\infty(\tau)) d\tau \\ + \int_0^T (\rho(v_{n_j}(\tau)) - \rho(v_\infty(\tau))) q_{n_j}(\tau) \varphi(\tau) d\tau \rightarrow 0. \end{aligned} \quad (2.9)$$

Como  $q_{n_j}$  converge fracamente para  $q_\infty$  (passo 4), temos que

$$\int_0^T \varphi(\tau) \rho(v_\infty(\tau)) (q_{n_j}(\tau) - q_\infty(\tau)) d\tau \rightarrow 0.$$

Além disso, temos também que

$$\left| \int_0^T (\rho(v_{n_j}(\tau)) - \rho(v_\infty(\tau))) q_{n_j}(\tau) \varphi(\tau) d\tau \right| \leq$$

$$\|\rho(v_{n_j}(\tau)) - \rho(v_\infty(\tau))\| \|q_{n_j}(\tau)\| \|\varphi(\tau)\|,$$

$\rho$  é uniformemente contínua e  $v_{n_j}$  converge uniformemente para  $v_\infty$  (passo 5),

de modo que

$$\|\rho(v_{n_j}(\tau)) - \rho(v_\infty(\tau))\| \rightarrow 0.$$

Assim, a convergência (2.9) está estabelecida e, portanto,  $\tilde{k}_\infty$  é um limite fraco da subsequência  $k_{n_j}$ . Como o limite fraco é único, concluímos que  $k_\infty = \tilde{k}_\infty$  e, portanto, segue-se que  $k_\infty$  é uma demanda térmica admissível.

PASSO 7.  $o(k_\infty) = c = \inf_E o(k(q, s))$ .

Suponha, por absurdo, que  $o(k_\infty) > m > c$ . Como  $o(k_n)$  converge para  $c$ , dado um  $\epsilon > 0$ , existe um índice  $n_0 \in \mathbb{N}$  tal que para todo  $n > n_0$ , tem-se  $|o(k_n) - c| < \epsilon$ . Em particular,  $o(k_n) \leq m$  para todo  $n > n_0$ . Observe que o conjunto

$$o^{-1}(m) = \{f \in L_2([0, T]) \mid f \geq 0 \text{ e } o(f) \leq m\}$$

é convexo, pois a função  $p$  é convexa. Agora, como existe subsequência  $k_{n_j}$  de  $k_n$  que converge fracamente para  $k_\infty$ , segue-se que  $k_\infty$  pertence ao fecho fraco de  $o^{-1}(m)$ . Lembrando que, para conjuntos convexos, o fecho fraco coincide com o fecho forte ([01, 12]), concluímos então que  $k_\infty$  pertence ao fecho forte de  $o^{-1}(m)$ . Desta maneira, existe uma seqüência de funções  $f_n$  em  $o^{-1}(m)$  tal que

$$f_n \xrightarrow{\|\cdot\|_2} k_\infty.$$

Mas se  $f_n \in o^{-1}(m)$ , então  $o(f_n) \leq m$ . Como o operador  $o$  é contínuo em  $L_2([0, T])$  (passo 1), temos que

$$o(k_\infty) = \lim o(f_n) \leq m,$$

o que contradiz a hipótese inicial de que  $o(k_\infty) > m > c$ . Assim, nos resta que

$$o(k_\infty) \leq c.$$

No passo 4, demonstramos que existe um modo de operação  $(q_\infty, s_\infty)$  admissível tal que  $k_\infty = d - \rho(v_\infty) \cdot q_\infty$ . Portanto, também vale a desigualdade

$$o(k_\infty) \geq c,$$

já que  $c$  é o ínfimo dos  $o(k)$ , para  $k$  admissível. Desta maneira,  $o(k_\infty) = c$  e, conseqüentemente,  $(q_\infty, s_\infty)$  é ponto de mínimo global do funcional  $o(k) = o(q, s)$  em  $E$ . O problema  $M_\infty$  possui então (pelo menos) uma solução. ■

### 2.3 O volume $v$ como variável de controle

Intuitivamente, não parece ser uma boa estratégia operacional fazer vertimento em um reservatório se ele não estiver cheio.

Uma operação  $(\tilde{q}, \tilde{s})$  que faz vertimento de água apenas quando o reservatório está cheio, será denominado de *operação econômica*.

Vamos mostrar que, dada uma operação admissível, é sempre possível obter uma operação econômica “equivalente”, sem que isso implique no aumento do custo.

**Teorema 2.2** Seja um modo de operação  $(q, s)$  com custo  $\mathcal{O}$ . Existe uma operação econômica  $(\tilde{q}, \tilde{s})$  que satisfaz as propriedades

$$(1) \tilde{v}(t) < \bar{v} \Rightarrow s(t) = 0 \quad \text{e}$$

$$(2) \tilde{v}(t) = \bar{v} \Rightarrow q(t) = \min \left\{ b(t) - \tilde{v}'(t), \bar{q}, \frac{d(t)}{\rho(\tilde{v}(t))} \right\},$$

e que tem custo  $\tilde{\mathcal{O}} \leq \mathcal{O}$ .

*Demonstração.* A operação econômica  $(\tilde{q}, \tilde{s})$  será construída a partir da solução do sistema

$$\begin{cases} w(t) = \min \left\{ \bar{v}, v(a) + \int_a^t (b(\tau) - r(\tau)) d\tau \right\}, \\ \rho(w(t)) r(t) = \rho(v(t)) q(t), \end{cases} \quad (2.10)$$

nas variáveis  $w(t)$  e  $r(t)$ .

Como antes, dividiremos a demonstração do teorema em vários passos.

PASSO 1. O sistema (2.10) possui uma solução.

Considere a seguinte seqüência de funções definidas, recursivamente, por

$$\begin{cases} w_0(t) = v(t), \\ w_{j+1}(t) = \min \left\{ \bar{v}, v(a) + \int_a^t (b(\tau) - r_j(\tau)) d\tau \right\}, \end{cases}$$

onde  $r_j(t) = \rho(v(t)) q(t) / \rho(w_j(t))$ .

Vamos mostrar que esta seqüência possui uma subseqüência  $(w_{n_j}, r_{n_j})$  convergente cujo limite será, portanto, uma solução do sistema (2.10). Para obter tal subseqüência, usaremos o teorema de Ascoli-Arzelá [19]: toda seqüência eqüicontínua e simplesmente limitada de funções reais definidas num conjunto compacto possui uma subseqüência uniformemente convergente.

Uma vez que a convergência de  $w_{j_n}$  assegura a de  $r_{j_n}$ , é suficiente mostrarmos que a seqüência  $w_j$  é eqüicontínua e simplesmente limitada. Mas, para isto, precisamos mostrar antes que  $w_j$  e  $r_j$  são seqüências monótonas e que as funções  $w_j$  são absolutamente contínuas.

1. As seqüências  $w_j$  e  $r_j$  são monótonas.

Usando indução em  $j$ , vamos mostrar que

$$w_{j+1}(t) \geq w_j(t) \quad \text{e} \quad r_{j+1}(t) \leq r_j. \quad (2.11)$$

Para o primeiro passo indutivo, devemos obter que  $w_1(t) \geq w_0(t)$  e  $r_1(t) \leq r_0(t)$ . Mas, pela construção das funções  $w_0$ ,  $w_1$ ,  $r_0$  e  $r_1$ , temos que

$$\begin{aligned} w_0(t) &= v(t), \\ w_1(t) &= \min \left\{ \bar{v}, v(a) + \int_a^t (b(\tau) - r_0(\tau)) d\tau \right\}, \\ r_0(t) &= q(t), \\ r_1(t) &= \frac{\rho(v(t)) q(t)}{\rho(w_1(t))}. \end{aligned}$$

Uma vez que o volume  $v$  é uma função absolutamente contínua, podemos, a partir da equação de balanço hídrico, escrever que

$$w_0(t) = v(a) + \int_a^t (b(\tau) - q(\tau) - s(\tau)) d\tau.$$

Como  $q(t) = r_0(t)$  e a restrição sobre os limites de vertimento nos diz que  $s$  é uma função não-negativa, segue-se que

$$v(a) + \int_a^t (b(\tau) - r_0(\tau)) d\tau \geq w_0(t).$$

Mais ainda, a existência de uma cota superior para o volume do reservatório nos rende que

$$\bar{v} \geq w_0(t),$$

e, assim,

$$w_1(t) \geq w_0(t).$$

Para obter que  $r_1(t) \leq r_0(t)$ , basta lembrar que a função  $\rho$  é não-decrescente e, então,

$$\rho(w_1(t)) \geq \rho(w_0(t)),$$

o que nos permite concluir que

$$r_1(t) \leq r_0(t).$$

Para o segundo passo indutivo, suponha que  $r_{l+1}(t) \leq r_l(t)$ . Então, a partir da definição de  $w_{j+1}$ , é fácil de ver que  $w_{l+2}(t) \geq w_{l+1}(t)$  e, conseqüentemente, que  $r_{l+2}(t) \leq r_{l+1}(t)$ . Isto nos mostra que as seqüências  $w_j$  e  $r_j$  são, de fato, monótonas.

2. As funções  $w_j$  são absolutamente contínuas.

Por construção, sabemos que

$$w_{j+1}(t) = \min \left\{ \bar{v}, v(a) + \int_a^t (b(\tau) - r_j(\tau)) d\tau \right\}.$$

Claramente as funções  $\bar{v}$  e  $v(a) + \int_a^t (b(\tau) - r_j(\tau)) d\tau$  são absolutamente contínuas. Tendo em vista que o mínimo entre duas funções  $\alpha$  e  $\beta$  pode ser escrito como  $(|\alpha + \beta| - |\alpha - \beta|)/2$ , que a soma de funções absolutamente contínuas é absolutamente contínua e que o módulo de uma função absolutamente contínua também é absolutamente contínuo, concluímos que as funções  $w_{j+1}$  são absolutamente contínuas. Como  $w_0 = v$  é absolutamente contínua, podemos então dizer que cada função  $w_j$  é absolutamente contínua. Em particular, cada  $w_j$  satisfaz o teorema fundamental do cálculo.

3. A seqüência  $w_j$  é simplesmente limitada.

Observe que  $\underline{v} \leq v(t) = w_0(t) \leq w_j(t) \leq \bar{v}$ , ou seja, para todo  $j$  e para todo  $t$ , vale que

$$|w_j(t)| \leq \bar{v}.$$

4. A seqüência  $w_j$  é eqüicontínua.

Uma vez que as funções  $w_j$  são absolutamente contínuas, se  $x$  e  $y$  são tais que  $a \leq y \leq x \leq b$ , então

$$|w_j(x) - w_j(y)| = \left| \int_y^x w_j'(t) dt \right| \leq \int_y^x |w_j'(t)| dt.$$

Mas  $w_j'(t) = b - r_j$  se  $w_j(t) = v(a) + \int_a^t (b(\tau) - r_j(\tau)) d\tau$  e  $w_j'(t) = 0$  se  $w_j(t) = \bar{v}$ . Como  $b$  e  $r_j$  são funções limitadas, as funções  $w_j'$  também o são, pois

$$|w_j'(t)| \leq b_i(t) + \bar{q} \leq \|b\|_\infty + \bar{q},$$

que independe do índice  $j$ . Desta maneira, vale que

$$|w_j(x) - w_j(y)| \leq (\|b\|_\infty + \bar{q}) |x - y|,$$

Isto nos mostra que a seqüência  $w_j$  é eqüicontínua.

PASSO 2. Existe um modo de operação  $(\hat{q}, \hat{s})$  admissível com custo  $\hat{\mathcal{O}} = \mathcal{O}$ .

A construção do modo  $(\tilde{q}, \tilde{s})$ , a partir do modo de operação inicial  $(q, s)$  admissível, é feita em duas etapas. Na primeira, obtemos o modo de operação  $(\hat{q}, \hat{s})$ , definido por  $\hat{q}(t) = r(t)$  e  $\hat{s}(t) = b(t) - \hat{q}(t) - \hat{v}'(t)$ , com  $\hat{v}(t) = w(t)$ , onde  $(w, r)$  é uma solução do sistema (2.10). Este modo  $(\hat{q}, \hat{s})$  é admissível e possui o mesmo custo operacional do modo inicial.

1. O modo  $(\hat{q}, \hat{s})$  satisfaz a restrição  $\hat{k}(t) = d(t) - \rho(\hat{v}(t)) \hat{q}(t) \geq 0$ .

Para o modo admissível  $(q, s)$ , a desigualdade  $d(t) - \rho(v(t)) q(t) \geq 0$  é válida e, como  $(w, r)$  é uma solução do sistema apresentado em (2.10), temos

que  $\rho(v(t))q(t) = \rho(w(t))r(t)$ . Portanto, podemos escrever que

$$d(t) - \rho(w(t))r(t) = d(t) - \rho(\hat{v}(t))\hat{q}(t) \geq 0.$$

2. O modo  $(\hat{q}, \hat{s})$  satisfaz a restrição  $\hat{v}'(t) = b(t) - \hat{q}(t) - \hat{s}(t)$ .

Segue-se diretamente da definição de  $\hat{s}(t)$ .

3. O modo  $(\hat{q}, \hat{s})$  satisfaz a restrição  $\underline{v} \leq \hat{v}(t) \leq \bar{v}$ .

Como  $w_j$  é uma seqüência simplesmente limitada, temos que  $\underline{v} \leq v(t) \leq w_j(t) \leq \bar{v}$  para cada  $j \in \mathbb{N}$ . Lembrando que o volume  $\hat{v}(t)$  é definido como o limite da subseqüência  $w_{j_n}(t)$ , vemos que  $\underline{v} \leq v(t) \leq \hat{v}(t) \leq \bar{v}$ .

4. O modo  $(\hat{q}, \hat{s})$  satisfaz a restrição  $0 \leq \hat{q}(t) \leq \bar{q}$ .

Como a eficiência de turbinamento  $\rho$  da usina hidroelétrica é estritamente crescente, podemos afirmar que  $\rho(\underline{v}) \leq \rho(v(t)) \leq \rho(\hat{v}(t)) \leq \rho(\bar{v})$  e, portanto, vale que

$$0 \leq q(t) \leq \frac{\rho(v(t))q(t)}{\rho(\bar{v})} \leq \hat{q}(t) = \frac{\rho(v(t))q(t)}{\rho(\hat{v}(t))} \leq \frac{\rho(v(t))q(t)}{\rho(v(t))} \leq \bar{q}.$$

5. O modo  $(\hat{q}, \hat{s})$  satisfaz a restrição  $0 \leq \hat{s}(t) \leq \bar{s}$ .

Como  $\hat{v}(t) = w(t)$ , do sistema (2.10), temos que

$$\hat{v}'(t) = \begin{cases} 0, & \text{se } \hat{v}(t) = \bar{v}, \\ b(t) - \hat{q}(t), & \text{se } \hat{v}(t) = \int_a^t [b(\tau) - \hat{q}(\tau)] d\tau < \bar{v}, \end{cases}$$

e, então,

$$\hat{s}(t) = \begin{cases} b_i(t) - \hat{q}_i(t), & \text{se } \hat{v}_i(t) = \bar{v}_i, \\ 0, & \text{se } \hat{v}(t) = \int_a^t [b(\tau) - \hat{q}(\tau)] d\tau < \bar{v}. \end{cases}$$

Uma vez que  $0 \leq \hat{q}(t) \leq \bar{q}$  e o modo  $(q, s)$  é admissível, segue-se que

$$0 \leq b(t) - \bar{q} \leq b(t) - \hat{q}(t) \leq b(t) \leq \bar{s}$$

Assim, da definição de  $\hat{s}(t)$ , concluímos que  $0 \leq \hat{s}(t) \leq \bar{s}$ .

6. O custo  $\hat{\mathcal{O}}$  do modo  $(\hat{q}, \hat{s})$  é igual ao custo  $\mathcal{O}$  do modo  $(q, s)$ .

Já que  $\hat{v}(t) = w(t)$  e  $\hat{q}(t) = r(t)$ , segue-se que  $(\hat{v}, \hat{q})$  é solução do sistema (2.10). Assim,  $\rho(v(t)) q(t) = \rho(\hat{v}(t)) \hat{q}(t)$  e, então,

$$\hat{\mathcal{O}} = \int_a^b p(d(t) - \rho(\hat{v}(t)) \hat{q}(t)) dt = \int_a^b p(d(t) - \rho(v(t)) q(t)) dt = \mathcal{O}.$$

PASSO 3. Existe um modo de operação econômico  $(\tilde{q}, \tilde{s})$  admissível que apresenta custo  $\tilde{\mathcal{O}} \leq \mathcal{O}$ .

Observe que se  $\hat{v}(t) < \bar{v}$  para todo  $t \in [0, T]$ , então a usina hidroelétrica já opera no modo econômico, isto é, sem vertimentos. Quando, no entanto,  $\hat{v}(t) = \bar{v}$ , para algum  $t$ , ainda é necessário que se façam as seguintes modificações no seus turbinamentos e vertimentos,

$$\hat{q}(t) = \min \left\{ b(t), \bar{q}, \frac{d(t)}{\rho(\hat{v}(t))} \right\}, \quad \hat{s}(t) = b(t) - \hat{q}(t),$$

a fim de se obter uma operação econômica.

Observe também que estas alterações mantêm admissibilidade. De fato, elas pedem que se turbine toda a afluência  $b$ , desde que isto não ultrapasse o turbinamento máximo  $\bar{q}$  e nem se produza mais energia do que a solicitada pela demanda  $d$ .

Note também que o custo não aumenta, pois o volume  $\tilde{v}(t)$  não se altera e o turbinamento  $\hat{q}(t)$  não diminui.

No final de todo este processo, construímos um modo de operação  $(\tilde{q}, \tilde{s})$  que satisfaz as relações

$$\tilde{q}(t) = \begin{cases} \min \left\{ b(t) - \tilde{v}'(t), \bar{q}, \frac{d(t)}{\rho(\tilde{v}(t))} \right\}, & \text{se } \tilde{v}(t) = \bar{v}, \\ b_i(t) - \tilde{v}'(t), & \text{se } \tilde{v}(t) < \bar{v}, \end{cases}$$

e

$$\tilde{s}(t) = \begin{cases} b(t) - \tilde{v}'(t) - \tilde{q}(t), & \text{se } \tilde{v}(t) = \bar{v}, \\ 0, & \text{se } \tilde{v}(t) < \bar{v}, \end{cases}$$

e que tem custo  $\tilde{\mathcal{O}}$  menor ou igual ao custo  $\mathcal{O}$  da operação inicial. ■



O teorema (2.2) garante então que, a partir de um modo admissível  $(q, s)$ , sempre é possível obter um outro modo de operação, sem aumento de custo, onde só se efetua vertimento se o reservatório estiver cheio. Com operações econômicas, é possível reescrever o problema  $M_\infty$  usando apenas o volume  $v$  do reservatório como variável de controle.

### Problema 2.2 ( $M_\infty^v$ )

$$\text{Minimizar } \int_0^T p(k(t)) dt, \quad (2.12)$$

com

$$k(t) = d(t) - \rho(v(t)) \cdot \min \left\{ b(t) - v'(t), \bar{q}, \frac{d(t)}{\rho(v(t))} \right\},$$

sujeito a

$$b(t) - v'(t) \geq 0 \text{ e} \quad (2.13)$$

$$\underline{v} \leq v(t) \leq \bar{v}, \quad (2.14)$$

onde o volume  $v$  é a variável de controle. Os turbinamentos são dados por

$$q(t) = \min \left\{ b(t) - v'(t), \bar{q}, \frac{d(t)}{\rho(v(t))} \right\},$$

e os vertimentos por  $s(t) = b(t) - v'(t) - q(t)$ .



# Capítulo 3

## Condições necessárias para otimalidade no caso contínuo

### 3.1 Condições locais para $M_\infty^v$

Nesta seção caracterizaremos as soluções ótimas  $(q(t), s(t))$  para  $M_\infty$  num intervalo  $t \in [a, b]$  que estejam operando em modo  $I$ . Como vimos, podemos supor que o vertimento  $s(t)$  é zero neste caso e, conseqüentemente, a equação de balanço hídrico assumirá a forma mais simples

$$v'(t) = b(t) - q(t).$$

Isto permite utilizar  $w(t) = v'(t)$  como variável de controle no lugar de  $q(t)$ .

Nestas novas variáveis,  $M_\infty$  pode ser descrito da seguinte maneira: considere um subintervalo de tempo  $[a, b] \subset [0, T]$  e fixe valores de volume  $v(a)$  e  $v(b)$  nas extremidades do intervalo. Queremos determinar dentre as funções  $w$  em modo  $I$  que satisfazem

$$\int_a^b w(t) dt = v(b) - v(a) \tag{3.1}$$

aquela que minimiza o funcional

$$F(w) = \int_a^b p \left( d(t) - \rho \left( v(a) + \int_a^t w(\tau) d\tau \right) \cdot (-w(t) + b(t)) \right) dt.$$

Começaremos por determinar quais são os pontos críticos do funcional  $F$ .

**Teorema 3.1**  $w$  é ponto crítico de  $F$  se, e somente se,

$$p'(k(t)) = p'(k(a)) \cdot \exp \left( - \int_a^t \frac{\rho'(v(\tau))}{\rho(v(\tau))} \cdot b(\tau) d\tau \right), \quad (3.2)$$

com  $k(t) = d(t) - \rho(v(t)) \cdot (-w(t) + b(t))$  e  $v(t) = v(a) + \int_a^t w(\tau) d\tau$ .

*Demonstração.* Vamos utilizar as técnicas habituais de cálculo variacional. A derivada direcional  $DF(w)\phi$  é dada por

$$\int_a^b p'(k(t)) \left[ -\rho'(v(t)) \left( \int_a^t \phi(\tau) d\tau \right) (-w(t) + b(t)) + \rho(v(t)) \phi(t) \right] dt,$$

com  $k(t) = d(t) - \rho(v(t)) \cdot (-w(t) + b(t))$  e  $v(t) = v(a) + \int_a^t w(\tau) d\tau$ . Uma vez que  $w$  está no hiperplano definido por (3.1) então a variação  $\phi$  deve satisfazer a condição

$$\int_a^b \phi(t) dt = 0. \quad (*)$$

Utilizando-se então integração por partes (permitida porque as funções envolvidas são absolutamente contínuas) obtemos que

$$\begin{aligned} DF(w)\phi &= \left( \int_a^t p'(k(\tau)) (-\rho'(v(\tau))) (-w(\tau) + b(\tau)) d\tau \right) \left( \int_a^t \phi(\tau) d\tau \right) \Big|_a^b \\ &\quad + \int_a^b \left( \int_a^t p'(k(\tau)) \rho'(v(\tau)) (-w(\tau) + b(\tau)) d\tau \right) \phi(t) dt \\ &\quad + \int_a^b p'(k(t)) \rho(v(t)) \phi(t) dt. \end{aligned}$$

Logo, usando a condição (\*), concluímos que

$$\begin{aligned} DF(w)\phi &= \\ &\int_a^b \left[ \int_a^t p'(k(\tau)) \rho'(v(\tau)) (-w(\tau) + b(\tau)) d\tau + p'(k(t)) \rho(v(t)) \right] \phi(t) dt. \end{aligned}$$

Portanto, pelo lema de du Bois-Reymond,  $w$  é ponto crítico de  $F$  se, e

somente se,

$$\int_a^t p'(k(\tau)) \cdot \rho'(v(\tau)) \cdot (-w(\tau) + b(\tau)) d\tau + p'(k(t)) \cdot \rho(v(t)) = p'(k(a)) \cdot \rho(v(a)),$$

ou ainda, que  $v$  satisfaz a seguinte equação:

$$p'(k(t)) \cdot \rho(v(t)) = p'(k(a)) \cdot \rho(v(a)) - \int_a^t p'(k(\tau)) \cdot \rho'(v(\tau)) \cdot (-w(\tau) + b(\tau)) d\tau. \quad (3.3)$$

Escrevendo  $z(t) = p'(k(t)) \cdot \rho(v(t))$  e  $C = p'(k(a)) \cdot \rho(v(a))$ , vem que

$$\begin{aligned} z(t) &= p'(k(t)) \cdot \rho(v(t)) \\ &= \int_a^t p'(k(\tau)) \cdot \rho'(v(\tau)) \cdot (w(\tau) - b(\tau)) d\tau + C \\ &= \int_a^t p'(k(\tau)) \cdot \rho(v(\tau)) \cdot \left( (\ln \rho(v(\tau)))' - \frac{\rho'(v(\tau))}{\rho(v(\tau))} \cdot b(\tau) \right) d\tau + C \\ &= \int_a^t z(\tau) \cdot \left( (\ln \rho(v(\tau)))' - \frac{\rho'(v(\tau))}{\rho(v(\tau))} \cdot b(\tau) \right) d\tau + C. \end{aligned}$$

Derivando-se a expressão acima (o que é possível já que o lado esquerdo é uma integral) segue-se que

$$z'(t) = z(t) \cdot \left( (\ln \rho(v(t)))' - \frac{\rho'(v(t))}{\rho(v(t))} \cdot b(t) \right)$$

e, portanto,

$$(\ln z(t))' = \frac{z'(t)}{z(t)} = (\ln \rho(v(t)))' - \frac{\rho'(v(t))}{\rho(v(t))} \cdot b(t).$$

Integrando-se de  $a$  a  $t$  e exponenciando em seguida, concluímos que

$$p'(k(t)) \cdot \rho(v(t)) = p'(k(a)) \cdot \rho(v(t)) \cdot \exp \left( - \int_a^t \frac{\rho'(v(\tau))}{\rho(v(\tau))} \cdot b(\tau) d\tau \right).$$

Assim,  $w$  é um ponto crítico de  $F$  se, e somente se,  $w$  satisfaz a equação integral

$$p'(k(t)) = p'(k(a)) \cdot \exp \left( - \int_a^t \frac{\rho'(v(\tau))}{\rho(v(\tau))} \cdot b(\tau) d\tau \right). \quad \blacksquare$$

**Observações:**

- (a) Não é difícil de ver que uma solução de (3.2) definida em  $[t_1, t_3]$  é a justaposição das soluções nos subintervalos  $[t_1, t_2]$  e  $[t_2, t_3]$ , o que está de acordo com o princípio de otimalidade de Bellman.
- (b) Assumindo a diferenciabilidade de todas as funções envolvidas, podemos derivar a equação (3.2) com relação a  $t$  e obter uma equação diferencial de segunda ordem para  $v$ . Condições iniciais naturais são os valores de  $v$  e  $v'$  no tempo inicial.

**3.2 O caso de afluência  $b \equiv 0$** 

Se  $b(t) \equiv 0$ , então a equação integro-diferencial (3.2) assume a forma

$$p'(k(t)) = p'(k(a)).$$

Como  $p'$  é injetiva segue-se, que o modo ótimo de operação em  $I$  mantém constante o valor da demanda térmica, isto é, ocorre a *equidistribuição* da demanda térmica  $k(t)$ :

$$k(t) = d(t) - \rho(v(t)) \cdot (-w(t) + b(t)) = k(a) = d(a) - \rho(v(a)) \cdot (-w(a) + b(a)).$$

A equação (3.2) pode ser resolvida explicitamente nesta situação. De fato, por equidistribuição segue-se que

$$(R(v(t)))' = \rho(v(t)) \cdot w(t) = k(a) - d(t),$$

com  $R$  uma primitiva de  $\rho$ . Integrando-se de  $a$  a  $t$  vem que

$$R(v(t)) - R(v(a)) = k(a) \cdot (t - a) - \int_a^t d(\tau) d\tau.$$

Como  $\rho$  é positiva temos que  $R$  é inversível, logo

$$v(t) = R^{-1} \left( R(v(a)) + k(a) \cdot (t - a) - \int_a^t d(\tau) d\tau \right).$$

A partir desta expressão, podemos escrever a constante  $k(a)$  em termos dos

volumes inicial ( $v(a)$ ) e final ( $v(b)$ ), da seguinte maneira:

$$k(a) = \frac{R(v(b)) - R(v(a))}{b - a} + \frac{\int_a^b d(\tau) d\tau}{b - a}.$$

Se  $v$  é uma operação econômica, então o turbinamento correspondente é dada por  $q(t) = -v'(t)$  desde que vertimentos não ocorrem quando a afluência é zero. Vamos mostrar que a imagem da aplicação

$$v \rightarrow k(v) = d + \rho(v) \cdot v',$$

onde  $v$  é uma operação econômica admissível, é um conjunto convexo em  $L^2([0, T])$ . Combinando este fato com a convexidade estrita do funcional,

$$k \mapsto C(k) = \int_0^T p(k(t)) dt,$$

teremos a unicidade do mínimo e um pouco mais: a operação ótima pode ser alcançada a partir de qualquer ponto do conjunto admissível por um caminho admissível ao longo do qual as operações têm um custo decrescente.

Considere duas funções de demanda térmica  $k_1 = k(v_1) = d + \rho(v_1) \cdot v_1'$  e  $k_2 = k(v_2) = d + \rho(v_2) \cdot v_2'$  associadas com duas operações econômicas admissíveis,  $v_1$  e  $v_2$ , respectivamente. Para  $\tilde{k} = \alpha \cdot k_1 + \beta \cdot k_2$ , com  $\alpha, \beta \in [0, 1]$  e  $\alpha + \beta = 1$ , precisamos mostrar a existência de uma operação econômica  $v$  tal que  $k(v) = \tilde{k}$ . Para fazer isto, defina  $v$  como a solução da equação diferencial

$$d + \rho(v) \cdot v' = \tilde{k},$$

com  $v(0) = v_1(0) = v_2(0)$ . Claramente  $k(v) = \tilde{k}$ , precisamos apenas mostrar que  $v$  é uma operação econômica admissível. Desde que  $k_1$  e  $k_2$  are funções positivas, temos que

$$k(v) = d + \rho(v) \cdot v' = \alpha \cdot k_1 + \beta \cdot k_2 \geq 0.$$

Para provar que  $\underline{v} \leq v \leq \bar{v}$ , é suficiente mostrar que  $R(\underline{v}) \leq R(v) \leq R(\bar{v})$ , onde  $R$  é uma primitiva de  $\rho$ , com  $R(0) = 0$ . Mas isto segue do fato de que

$R(v) = \alpha \cdot R(v_1) + \beta \cdot R(v_2)$ ,  $\underline{v} \leq v_1, v_2 \leq \bar{v}$  e  $R$  é uma função crescente. Finalmente, to ver que  $q(t) = -v'(t) \leq \bar{q}$ , observe que

$$\bar{q} \cdot (\alpha \cdot \rho(v_1) + \beta \cdot \rho(v_2)) \geq d - \tilde{k} = -\rho(v) \cdot v',$$

desde que  $q_1(t) = -v'_1(t) \leq \bar{q}$  and  $q_2(t) = -v'_2(t) \leq \bar{q}$ . Assim, resta mostrar que  $\rho(v) \geq \alpha \cdot \rho(v_1) + \beta \cdot \rho(v_2)$  ou, mais precisamente, que a desigualdade

$$\begin{aligned} & \tilde{\rho} \left( R(v_0(t)) - \int_0^t (\alpha k_1(\tau) + \beta k_2(\tau) - d(\tau)) d\tau \right) \geq \\ & \alpha \tilde{\rho} \left( R(v_0(t)) - \int_0^t (k_1(\tau) - d(\tau)) d\tau \right) + \beta \tilde{\rho} \left( R(v_0(t)) - \int_0^t (k_2(\tau) - d(\tau)) d\tau \right) \end{aligned}$$

se verifica, onde  $\tilde{\rho} = \rho \circ R^{-1}$ . Mas isto segue do fato de que  $\tilde{\rho}$  é uma função côncava, desde que  $\rho$ , por hipótese, é log-côncava.

Vamos agora discutir um fato surpreendente sobre operações admissíveis: turbinamento máximo em um intervalo não necessariamente é uma operação ótima, mesmo no caso de afluência zero. Os números no exemplo abaixo não são realísticos, mas eles são matematicamente consistentes.

Considere um sistema hidrotérmico com  $p(k) = k^2$ ,  $\underline{v} = 0.1$ ,  $\bar{v} = 1$ ,  $\bar{q} = 0.45$ ,  $T = 2$ ,  $\rho(x) = 2\sqrt{x}$ ,  $v(0) = \bar{v}$ ,  $b \equiv 0$  e  $d \equiv 1$ . A operação com turbinamento máximo

$$v_1(t) = 1 - 0.45t \quad (3.4)$$

tem custo to 0.308, enquanto que a operação híbrida (uma justaposição da solução de (3.2) com uma operação de turbinamento máximo)

$$v_2(t) = \begin{cases} (1 - 0.56t)^{2/3}, & \text{se } 0 \leq t \leq 0.78, \\ 0.68 - 0.45(t - 0.78), & \text{se } 0.78 \leq t \leq 2 \end{cases}$$

tem um custo menor: 0.301. Isto se deve à geometria do reservatório: poupar água pode ser conveniente para longos períodos de tempo.

### 3.3 Condições locais para $M_{NS}$

Discretizando o intervalo  $[a, b]$  em  $NS$  subintervalos de mesmo tamanho, um ponto crítico  $(v_2, \dots, v_{NS+1})$  do funcional

$$F(v_2, \dots, v_{NS+1}) = \sum_{t=1}^{NS} p \left( d_t - \rho(v_t) \cdot \left( -\frac{v_{t+1} - v_t}{\Delta\tau} + b_t \right) \right) \cdot \Delta\tau, \quad (3.5)$$



operando em modo  $I$ , deve satisfazer as equações

$$\frac{\partial F}{\partial v_2} = \dots = \frac{\partial F}{\partial v_{NS+1}} = 0. \quad (3.6)$$

Temos

$$\frac{\partial F}{\partial v_t} = p'(k_{t-1}) \cdot \rho(v_{t-1}) - p'(k_t) \cdot \rho(v_t) - p'(k_t) \cdot \rho'(v_t) \cdot \left( -\frac{v_{t+1} - v_t}{\Delta\tau} + b_t \right) \cdot \Delta\tau = 0,$$

com

$$k_t = d_t - \rho(v_t) \cdot \left( -\frac{v_{t+1} - v_t}{\Delta\tau} + b_t \right),$$

para  $t = 2, \dots, NS$ . Desta maneira, um ponto crítico  $(v_2, \dots, v_{NS+1})$  de (3.5) deve atender as equações

$$p'(k_{t-1}) \cdot \rho(v_{t-1}) - p'(k_t) \cdot \rho(v_t) = p'(k_t) \cdot \rho'(v_t) \cdot \left( -\frac{v_{t+1} - v_t}{\Delta\tau} + b_t \right) \cdot \Delta\tau.$$

Somando-se as expressões acima, para  $t = 2, \dots, NS$ , obtemos que

$$p'(k_1) \cdot \rho(v_1) - p'(k_{NS}) \cdot \rho(v_{NS}) = \sum_{t=2}^{NS} p'(k_t) \cdot \rho'(v_t) \cdot \left( -\frac{v_{t+1} - v_t}{\Delta\tau} + b_t \right) \cdot \Delta\tau,$$

ou ainda,

$$p'(k_1) \cdot \rho(v_1) - p'(k_{NS}) \cdot \rho(v_{NS}) = -p'(k_1) \cdot \rho'(v_1) \cdot \left( -\frac{v_2 - v_1}{\Delta\tau} + b_1 \right) \cdot \Delta\tau + \sum_{t=1}^{NS} p'(k_t) \cdot \rho'(v_t) \cdot \left( -\frac{v_{t+1} - v_t}{\Delta\tau} + b_t \right) \cdot \Delta\tau.$$

Fazendo  $NS \rightarrow +\infty$ , de modo que  $\Delta\tau \rightarrow 0$ , vem que

$$p'(k(a)) \cdot \rho(v(a)) - p'(k(b)) \cdot \rho(v(b)) = \int_a^b p'(k(\tau)) \cdot \rho'(v(\tau)) \cdot (-v'(\tau) + b(\tau)) d\tau,$$

isto é, obtemos justamente a condição (3.3)

$$p'(k(b)) \cdot \rho(v(b)) = p'(k(a)) \cdot \rho(v(a)) - \int_a^b p'(k(\tau)) \cdot \rho'(v(\tau)) \cdot (-w(\tau) + b(\tau)) d\tau,$$

estabelecida para o modo contínuo com  $t = b$ . Desta maneira, as operações ótimas discretas interiores de  $M_{NS}$ , que são soluções do sistema (3.6), convergem para a operação ótima contínua interior de  $M_\infty$ , que é solução da equação (3.3).

### 3.4 Globalidade e unicidade

Apesar da natureza não-convexa do problema, um ponto crítico admissível do funcional custo é o mínimo global do funcional.

**Teorema 3.2** (EXISTÊNCIA E UNICIDADE DO MÍNIMO GLOBAL) Se a solução  $w = v'$  da equação integral (3.2) é admissível, então  $v$  é o único mínimo global de  $M_\infty^v$  no intervalo  $[a, b]$ .

*Demonstração.* Faremos a demonstração em dois passos. Vamos primeiro demonstrar que se a solução  $w = v'$  de (3.2) é admissível com custo  $\Theta$  então qualquer outro ponto admissível no interior não pode operar com um custo  $\tilde{\Theta}$  menor do que  $\Theta$ . Depois, mostraremos que nenhum outro ponto admissível, mesmo não estando no modo  $I$ , pode operar com custo  $\tilde{\Theta}$  menor do que  $\Theta$ .

PASSO 1. Queremos mostrar que, para qualquer outra função  $\tilde{w}$  no interior do conjunto admissível, vale que

$$\int_a^b p(d(t) - \rho(v(t)) \cdot (-w(t) + b(t))) dt \leq \int_a^b p(d(t) - \rho(\tilde{v}(t)) \cdot (-\tilde{w}(t) + b(t))) dt,$$

com  $\tilde{v}(t) = v(a) + \int_a^t \tilde{w}(\tau) d\tau$ . Mais ainda, queremos mostrar que se os custos totais foram iguais, isto é, se

$$\int_a^b p(d(t) - \rho(v(t)) \cdot (-w(t) + b(t))) dt = \int_a^b p(d(t) - \rho(\tilde{v}(t)) \cdot (-\tilde{w}(t) + b(t))) dt$$

então  $v = \tilde{v}$ . Pela concavidade do custo  $p$  segue-se que

$$\int_a^b \left( p(\tilde{k}(t)) - p(k(t)) \right) dt \geq \int_a^b p'(k(t)) \cdot (\tilde{k}(t) - k(t)) dt$$

com  $k(t) = d(t) - \rho(v(t)) \cdot (-w(t) + b(t))$  e  $\tilde{k}(t) = d(t) - \rho(\tilde{v}(t)) \cdot (-\tilde{w}(t) + b(t))$ . Utilizando a equação integral (3.2) vem que

$$\int_a^b \left( p(\tilde{k}(t)) - p(k(t)) \right) dt \geq \int_a^b p'(k(t)) \cdot (\tilde{k}(t) - k(t)) dt$$

e

$$\int_a^b p'(k(t)) \cdot (\tilde{k}(t) - k(t)) dt = \int_a^b E(t) \cdot [(R(\tilde{v}(t)) - R(v(t)))' - b(t) \cdot (\rho(\tilde{v}(t)) - \rho(v(t)))] dt,$$

com

$$E(t) = p'(k(a)) \cdot \exp \left( - \int_a^t \frac{\rho'(v(\tau))}{\rho(v(\tau))} \cdot b(\tau) d\tau \right)$$

e  $R$  uma primitiva de  $\rho$ . Integrando-se por partes e usando que

$$E'(t) = -E(t) \cdot b(t) \cdot \frac{\rho'(v(t))}{\rho(v(t))}$$

temos

$$\int_a^b p'(k(t)) \cdot (\tilde{k}(t) - k(t)) dt = \int_a^b \frac{E(t) \cdot b(t)}{\rho(v(t))} \cdot [\rho'(v(t)) \cdot (R(\tilde{v}(t)) - R(v(t))) - \rho(v(t)) \cdot (\rho(\tilde{v}(t)) - \rho(v(t)))] dt.$$

Como  $\rho$  é estritamente log-côncavo segue-se que

$$\rho'(v(t)) \cdot (R(\tilde{v}(t)) - R(v(t))) - \rho(v(t)) \cdot (\rho(\tilde{v}(t)) - \rho(v(t))) \geq 0.$$

Com efeito, considere a função

$$F(y) = H(x, y) = \rho'(x) \cdot (R(y) - R(x)) - \rho(x) \cdot (\rho(y) - \rho(x)).$$

Como  $F'(y) = \rho'(x) \cdot \rho(y) - \rho(x) \cdot \rho'(y)$  e  $F''(y) = \rho'(x) \cdot \rho'(y) - \rho(x) \cdot \rho''(y)$  vem que  $F(x) = 0$ ,  $F'(x) = 0$  e  $F''(x) > 0$ . Portanto,  $x$  é um mínimo local de  $F$ . Em verdade,  $x$  é um mínimo global de  $F$  pois não existem pontos críticos diferentes de  $x$ . Para verificarmos esta afirmação, observe que  $y$  é ponto crítico de  $F$  se, e somente se,  $\rho'(y)/\rho(y) = \rho'(x)/\rho(x)$  e que a função  $G(y) = \rho'(y)/\rho(y)$  é decrescente pois  $G'(y) = (\rho''(y) \cdot \rho(y) - (\rho'(y))^2)/(\rho(y))^2 < 0$

uma vez que  $\rho$  é estritamente log-côncavo. Logo  $F(y) = H(x, y) \geq F(x) = 0$  e, portanto,

$$\int_a^b p(\tilde{k}(t)) dt - \int_a^b p(k(t)) dt \geq \int_a^b \frac{E(t) \cdot b(t)}{\rho(v(t))} \cdot H(v(t), \tilde{v}(t)) dt \geq 0. \quad (**)$$

Para a unicidade, suponha que

$$\int_a^b p(\tilde{k}(t)) dt = \int_a^b p(k(t)) dt.$$

Por (\*\*\*) obtemos que

$$\int_a^b \frac{E(t) \cdot b(t)}{\rho(v(t))} \cdot H(v(t), \tilde{v}(t)) dt = 0.$$

Como  $E(t) > 0$ ,  $b(t) \geq 0$  e  $H(v(t), \tilde{v}(t)) \geq 0$  segue-se que  $b(t) \cdot H(v(t), \tilde{v}(t)) = 0$  para todo  $t \in [a, b]$ . Nos intervalos onde  $b(t) > 0$  obtemos que  $\tilde{v}(t)$  é raiz de

$$F(y) = \rho'(v(t)) \cdot (R(y) - R(v(t))) - \rho(v(t)) \cdot (\rho(y) - \rho(v(t))).$$

Como vimos,  $F$  possui apenas  $v(t)$  como raiz de modo que  $\tilde{v}(t) = v(t)$ . Nos intervalos onde  $b(t) = 0$  sabemos que deve ocorrer equidistribuição, isto é,  $k(t) = c$  e  $\tilde{k}(t) = \tilde{c}$  (pois  $(q(t), s(t) = 0)$  e  $(\tilde{q}(t), \tilde{s}(t) = 0)$  são pontos críticos do funcional  $F$ ). Uma vez estabelecida a unicidade nos intervalos onde  $b > 0$ , por continuidade das funções  $v$  e  $\tilde{v}$  segue-se que  $k(t) = c = \tilde{c} = \tilde{k}(t)$ . Por conseguinte,

$$d(t) + \rho(\tilde{v}(t)) \cdot \tilde{v}'(t) = d(t) + \rho(v(t)) \cdot v'(t),$$

isto é,  $\tilde{v}$  satisfaz

$$\tilde{v}'(t) = \frac{\rho(v(t)) \cdot v'(t)}{\rho(\tilde{v}(t))}.$$

Por unicidade das soluções de equações diferenciais ordinárias vem que  $\tilde{v}(t) = v(t)$ .

**PASSO 2.** Vamos estender a função  $p$  de modo que  $p(k) = 0$  para  $k < 0$  (a extensão continua sendo uma função suave). É fácil de ver, no passo 1, que os volumes  $\hat{v}(t)$  com  $\underline{v} \leq \hat{v}(t) \leq \bar{v}$  e  $\hat{q}(t) = -\hat{v}'(t) + b(t)$  que geram uma

demanda térmica  $\widehat{k}(t) = d(t) - \rho(\widehat{v}(t)) \cdot \widehat{q}(t)$  negativa ainda satisfazem as relações

$$\int_a^b \left( p(\widehat{k}(t)) - p(k(t)) \right) dt \geq$$

$$\int_a^b p'(k(t)) \cdot (\widehat{k}(t) - k(t)) dt = \int_a^b \frac{E(t) \cdot b(t)}{\rho(v(t))} \cdot H(v(t), \widehat{v}(t)) dt \geq 0 \quad (**)$$

e

$$\int_a^b p(\widehat{k}(t)) dt = \int_a^b p(k(t)) dt \Rightarrow \int_a^b p'(k(t)) \cdot (\widehat{k}(t) - k(t)) dt = 0 \Rightarrow \widehat{v} = v. \quad (***)$$

Segundo a formulação  $M_\infty^v$ , existem três modos de turbinamento:

$$\widetilde{q}(t) = -\widetilde{v}'(t) + b(t), \quad \widetilde{q}(t) = \bar{q} \quad \text{e} \quad \widetilde{q}(t) = \frac{d(t)}{\rho(\widetilde{v}(t))},$$

correspondentes aos modos interior, turbinamento máximo e demanda térmica zero. Nos três casos vale que  $\widetilde{q}(t) \leq \widehat{q}(t) = -\widetilde{v}'(t) + b(t)$ . Logo,

$$\widehat{k}(t) = d(t) - \rho(\widetilde{v}(t)) \cdot \widehat{q}(t) \leq \widetilde{k}(t) = d(t) - \rho(\widetilde{v}(t)) \cdot \widetilde{q}(t).$$

Observe que, eventualmente, a demanda térmica  $\widehat{k}(t)$  pode ser negativa. Ainda assim,

$$\int_a^b p'(k(t)) \cdot (\widehat{k}(t) - k(t)) dt \geq 0$$

pois  $p'(k(t)) \geq 0$  e  $\widetilde{k}(t) \leq \widehat{k}(t)$ . Como  $\widehat{q}(t) = -\widetilde{v}'(t) + b(t)$ , podemos usar (\*\*) obtendo

$$\int_a^b p'(k(t)) \cdot (\widehat{k}(t) - k(t)) dt \geq 0.$$

Desta maneira,

$$\begin{aligned} \int_a^b \left( p(\widetilde{k}(t)) dt - p(k(t)) \right) dt &\geq \int_a^b p'(k(t)) \cdot (\widetilde{k}(t) - k(t)) dt = \\ &\int_a^b p'(k(t)) \cdot (\widetilde{k}(t) - \widehat{k}(t)) dt + \int_a^b p'(k(t)) \cdot (\widehat{k}(t) - k(t)) dt \geq 0. \end{aligned}$$

Para a unicidade, basta observar que, se

$$\int_a^b p(\widetilde{k}(t)) dt = \int_a^b p(k(t)) dt$$

então

$$\int_a^b p'(k(t)) \cdot (\widehat{k}(t) - k(t)) dt = 0.$$

Como  $\widehat{q}(t) = -\widetilde{v}'(t) + b(t)$ , por (\*\*), segue-se  $\widetilde{v} = v$  para todo  $t \in [a, b]$ . ■

# Capítulo 4

## A combinatória para o modelo contínuo

Neste capítulo, consideramos um problema de otimização simples que servirá como inspiração para vários dos resultados que demonstraremos para o problema original.

### 4.1 Um problema de caminho mínimo

Considere um aberto  $R$  do plano, limitado por uma curva simples, com derivada contínua  $\Gamma(t)$ , e sejam  $A$  e  $Z$  pontos de  $\bar{R}$ . Vamos demonstrar a existência (e unicidade) de um caminho mínimo  $\gamma(t)$  ligando  $A$  a  $Z$  contido em  $\bar{R}$ . Para ser mais preciso, o resultado só vale para abertos  $R$  cuja fronteira satisfaz uma condição genérica, detalhada abaixo. O argumento aplica repetidas vezes a seguinte proposição elementar. Dizemos que um segmento de reta  $r$  é um *segmento interior de  $R$*  se o interior de  $r$  está em  $R$  e seus extremos estão na fronteira de  $R$ ,  $\partial R$ . Um segmento  $r$  é *tangencial* se seus extremos estão em  $\partial R$  e seu interior em  $\bar{R}$ : alguns pontos do interior de  $r$  nesse caso, então, podem estar em  $\partial R$ .

**Proposição 4.1** Seja  $r$  um segmento interior de  $R$ , e sejam  $R_1$  e  $R_2$  as duas componentes conexas do aberto  $R - r$ . Se os pontos  $A$  e  $Z$  estão no fecho de  $R_1$ , o caminho ótimo  $\gamma$  não passa por  $R_2$ .

*Demonstração.* A proposição é evidente a partir da figura (4.1) abaixo. Um caminho que entra em  $R_2$  teria que sair eventualmente e o trecho de

caminho em  $R_2$  pode ser substituído por um trecho mais curto dado por um sub-segmento de  $r$ . ■

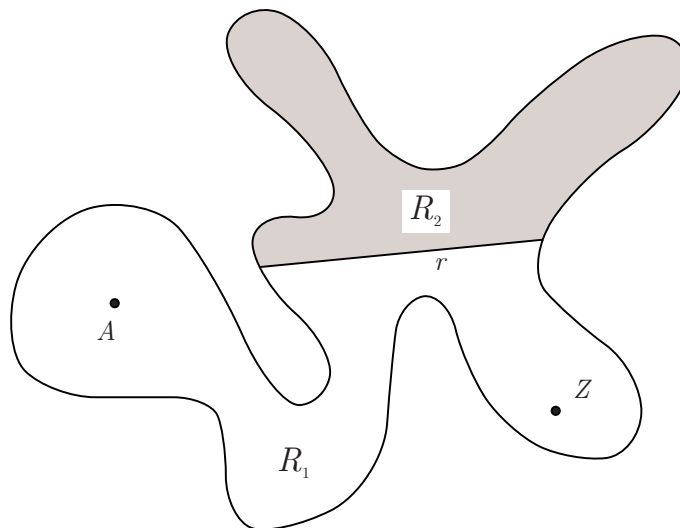


Figura 4.1: A reta  $r$  exclui a região  $R_2$ .

Todo segmento  $r$  como descrito na proposição acima que passa por  $A$ , então, restringe o percurso de  $\gamma$  a um subconjunto fechado de  $R$ : um caminho ótimo deveria então estar na interseção de todos esses fechados. Na figura (4.2), o segmento  $r_1$  elimina a possibilidade de  $\gamma$  estar na região aberta hachurada. Segmentos interiores próximos a  $r_1$  que ainda passam por  $A$  introduzem restrições adicionais. O caso extremo, dado pelo segmento tangencial  $r_2$  é especialmente informativo: as duas regiões abertas hachuradas não devem conter o caminho ótimo. Assim, se existir um caminho mínimo  $\gamma$  entre  $A$  e  $Z$ , ele tem que estar no sub-segmento  $AB$  e na parte (fechada) de  $R$  não hachurada.

Agora, considere segmentos tangenciais à  $\partial R$  na vizinhança de  $B$ : cada segmento elimina uma região aberta de  $R$ , e a interseção dos conjuntos restantes é dada pelo segmento  $AB$ , por um arco de  $\partial R$ ,  $BC$ , e mais uma parte fechada de  $R$  não hachurada. A tangente por  $C$ , por sua vez, mostra que  $\gamma$  tem que passar por  $AB$ ,  $BC$  e  $CD$ , e agora repete-se o processo de considerar tangentes a  $\partial R$  próximas a  $D$ .

Iterando, o ponto  $Z$  é finalmente alcançado depois de uma alternância de segmentos de reta e arcos de fronteira: se existe um caminho mínimo, tem que ser esse — esse então é o  $\gamma$  procurado. Motivações similares podem ser



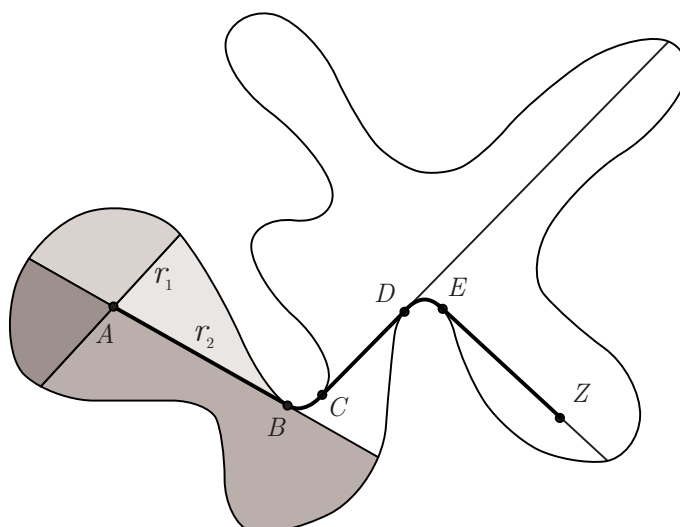


Figura 4.2: O caminho ótimo entre  $A$  e  $Z$ .

encontradas em [35].

A descrição acima não mostra a finitude do processo. Isto segue para um conjunto genérico de curvas  $\partial R$  do fato que os segmentos de reta entre os arcos de fronteira consistem de tangentes a  $\partial R$  em dois pontos: de maneira genérica, uma curva simples tem um número finito de tangentes com essa propriedade. Na verdade, existem abertos  $R$  para os quais o caminho construído pelo processo acima tem infinitos segmentos: considere, por exemplo, a região abaixo da curva  $(x, x^2(2 + \sin^2(\pi/x))/2)$  do plano — um caminho mínimo ligando  $(1,1)$  a  $(0,0)$  é assim (veja a figura (4.3)).

Uma consequência evidente da construção do caminho mínimo  $\gamma$  dada acima é que os trechos que formam  $\gamma$  têm a regularidade da fronteira de  $R$ , pelo menos, e que se encontram com derivadas laterais iguais — mais precisamente, se  $\gamma$  é percorrido com velocidade constante 1 (como geodésicas habitualmente são parametrizadas), a parametrização  $\gamma(t)$  resultante tem derivada contínua.

## 4.2 O caminho mínimo com restrições adicionais

Vamos supor agora que a região  $R$  do plano seja o aberto entre dois gráficos de funções suaves  $f(x)$  e  $g(x)$  que não se interceptam e entre duas

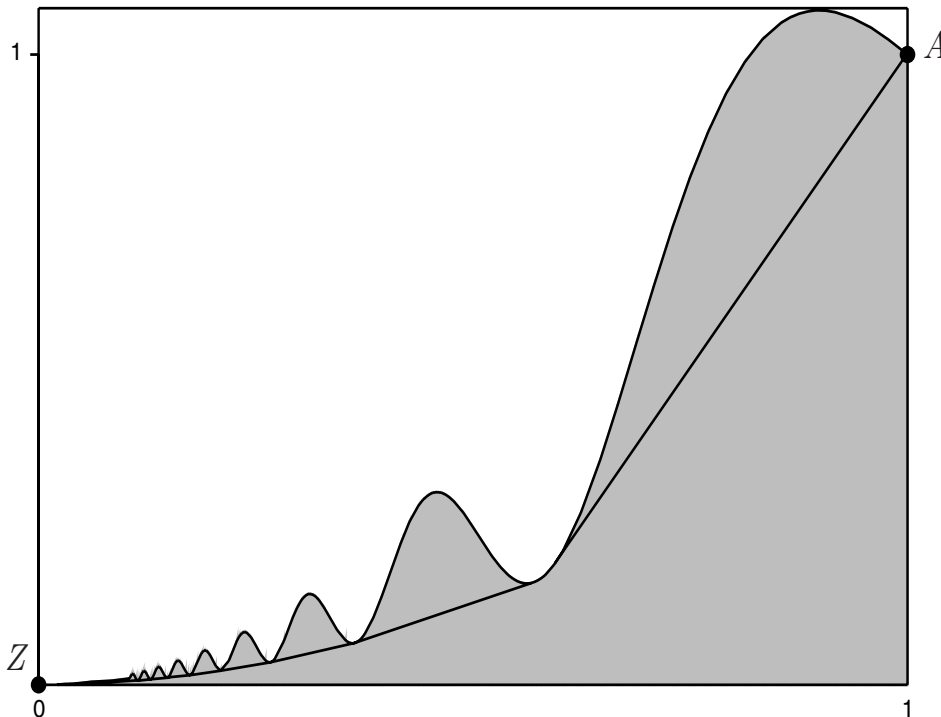


Figura 4.3: Existem infinitos segmentos no caminho ótimo ligando  $(1, 1)$  a  $(0, 0)$ .

verticais,  $x = 0$  e  $x = T$ , e que os pontos  $A$  e  $Z$  estejam respectivamente em  $x = 0$  e  $x = T$ . Certamente, um caminho ótimo (contínuo) é também o gráfico de uma função  $\gamma(x)$ . Finalmente, vamos também exigir que  $\gamma(x)$ , onde for derivável, tenha sua derivada entre dois valores, digamos  $0$  e  $-\bar{q}, \bar{q} > 0$ .

É óbvio que os argumentos envolvendo segmentos interiores e tangentes da seção anterior ainda se aplicam. Além disso, se dois pontos são ligados por um segmento de reta admissível (isto é, cuja derivada esteja dentro das restrições pertinentes), não existe caminho melhor entre eles. As obstruções na derivada, entretanto, limitam as escolhas de segmentos. Torna-se possível então que

- (1) não existam caminhos entre  $A$  e  $Z$ ,
- (2) um caminho ótimo não é necessariamente derivável.

A primeira dificuldade é exemplificada trivialmente no caso da segunda coordenada de  $Z$  ser maior do que a segunda coordenada de  $A$ . A segunda ocorre quando, devido a restrições na derivada, é impossível fazer uso de segmentos

tangenciais ideais. A otimalidade dos segmentos de reta entre dois pontos, entretanto, limita as possibilidades de justaposição de trechos ótimos. Assim, por exemplo, na figura (4.4), os pontos  $X$  e  $Y$  podem ser ligados de várias maneiras combinando segmentos de reta e trechos de fronteira, mas a preferível é aquela cujo segmento de reta tem derivada extrema  $-\bar{q}$ , já que dois caminhos se cruzam no ponto comum  $T$  e o comprimento do segmento  $XT$  é a distância entre  $X$  e  $T$ .

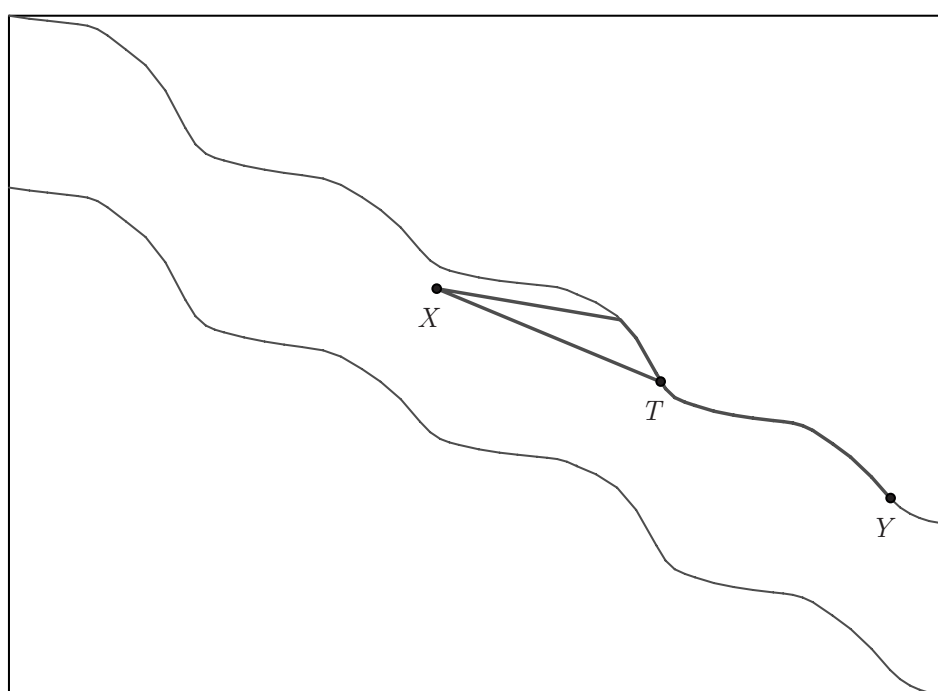


Figura 4.4: O segmento  $XT$  tem derivada extrema  $-\bar{q}$ .

### 4.3 A combinatória do modelo contínuo

A grande diferença entre o problema modelo e  $M_\infty$  está na caracterização de otimalidade: a função custo de  $M_\infty$  não é o comprimento de  $v(t) - B(t)$  em  $R$ , mesmo para alguma estrutura riemanniana não habitual em  $R$ . Entretanto, não é difícil ver porque esse problema é significativo para a solução de  $M_\infty$ : as exigências modelam as hipóteses feitas sobre o volume modificado  $v(t) - B(t)$  de  $M_\infty$ . A busca do  $v - B$  ótimo contínuo é a procura de um caminho mínimo entre os estados inicial e final do reservatório. O gráfico de  $v(t) - B(t)$  não pode ultrapassar cotas superior e inferior — caracterizando

a fronteira de uma região  $R$  do plano — e sua derivada também está cotada, como descrito na seção (2.3). A procura de uma função contínua  $v - B$  — isto é, excluir a possibilidade de jogar água fora sem necessidade imediata — já foi justificada nas seções (2.1) e (2.3).

A noção de distância entre dois pontos agora é o custo mínimo do trecho de  $v - B$  ligando os pontos, e pelo teorema (3.2), o menor custo possível entre todos — isto é, a contrapartida do segmento de reta no exemplo da situação euclidiana — é a única solução da equação integral (3.2) ligando os pontos, se as restrições forem satisfeitas por essa solução. Assim, os argumentos envolvendo segmentos interiores e tangentes se aplicam para essa outra geometria.

Os argumentos acima são suficientemente expressivos para justificar a nomenclatura que passaremos a empregar para as soluções admissíveis da equação integral (3.2) juntando dois pontos da região  $R$ : elas são *geodésicas* ligando esses dois pontos. Da unicidade da otimalidade entre caminhos sem vertimentos, existe no máximo uma geodésica entre dois pontos. As afinidades entre esse trechos de caminho ótimo e a situação riemanniana habitual não param aí: a equação (3.2), derivada mais uma vez (quando possível), é uma equação de segunda ordem na variável  $v$ . Mais precisamente, como os trechos em que a demanda é satisfeita têm custo zero, a analogia apropriada é que o trecho ótimo ligando  $A$  a  $Z$  sai de  $A$  e mantém-se dentro do cone de pontos acessíveis por  $A$ , no sentido relativístico do termo. Para efeitos do problema original, entretanto, a analogia, que serviu de inspiração, não parece mais necessária.

No próximo capítulo, o ponto ótimo para El Cajón é descrito em termos dessa justaposição de geodésicas, de trechos em que a derivada de  $v - B$  é extrema ( $0$  ou  $-\bar{q}$ ), e de trechos em que  $v - B$  coincide com uma das fronteiras da região  $R$ . Novamente, o único vertimento que nos interessa é o que possivelmente ocorre quando  $v - B$  coincide com um arco superior da fronteira da região  $R$ .

Mais uma vez, a otimalidade das geodésicas proíbe a justaposição de certos tipos de trechos. A figura (4.5) ilustra dois exemplos: o trecho  $AFB$  é a justaposição não suave de duas geodésicas  $AF$  e  $FB$  e o trecho  $XTY$  é a justaposição não suave de uma geodésica  $XT$  e um trecho  $TY$  de derivada extrema  $-\bar{q}$  (modo  $\bar{Q}$ ). Nos dois casos, é possível substituir a justaposição dos trechos por uma única geodésica.

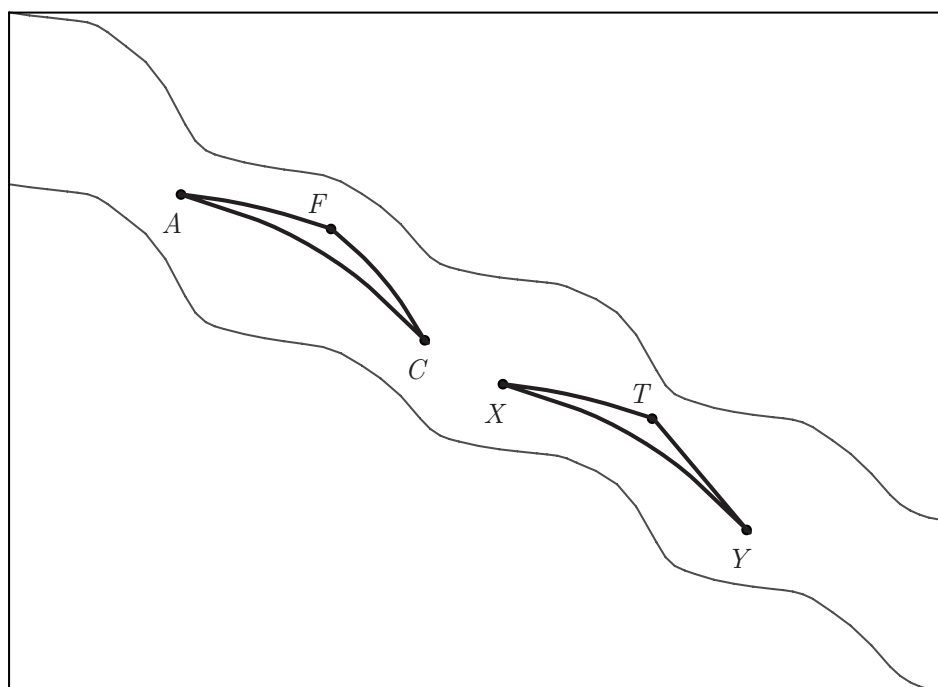


Figura 4.5: Dois exemplos de justaposições não suaves não permitidas.



# Capítulo 5

## Resultados numéricos

A equação (3.2) para a variável  $w = v'$  pode ser reescrita como uma equação integro-diferencial para o volume  $v$  do reservatório:

$$v'(t) = \frac{(p')^{-1} \left( p'(k(a)) \cdot \exp \left( - \int_a^t \frac{\rho'(v(\tau))}{\rho(v(\tau))} \cdot b(\tau) d\tau \right) \right) - d(t)}{\rho(v(t))} + b(t), \quad (5.1)$$

onde  $k(a) = d(a) - \rho(v(a)) \cdot (-v'(a) + b(a))$ . Para resolvê-la numericamente, implementamos um método análogo ao método de Heun que é utilizado para se resolver sistemas de equações diferenciais de primeira ordem ([18]). O método resultante tem convergência quadrática. A integral

$$\int_a^t \frac{\rho'(v(\tau))}{\rho(v(\tau))} \cdot b(\tau) d\tau$$

foi estimada com a regra do trapézio. Métodos de convergência mais alta, análogos aos métodos de Runge-Kutta para equações diferenciais, podem ser obtidos, mas o método que empregamos desempenhou muito bem nos casos onde soluções explícitas eram conhecidas.

Como uma verificação numérica, considere na figura (5.1) as geodésicas discretas  $M_{48}$  e  $M_{96}$ , e a geodésica contínua  $M_{\infty}$ , no intervalo de tempo  $[11.00, 47.00]$ , obtidas resolvendo-se o sistema (3.6) e a equação integro-diferencial (5.1) com volume inicial modificado  $\nu(11) = 2.30544 \cdot 10^9$ , com  $\nu(11) = 2.30544 \cdot 10^9$  e  $\nu'(11) = -65.56$ .

Podemos aplicar as técnicas de caminho mínimo desenvolvidas no capítulo anterior para calcular a operação ótima da versão contínua para o exemplo de El Cajón apresentado no primeiro capítulo. A existência de uma tal operação

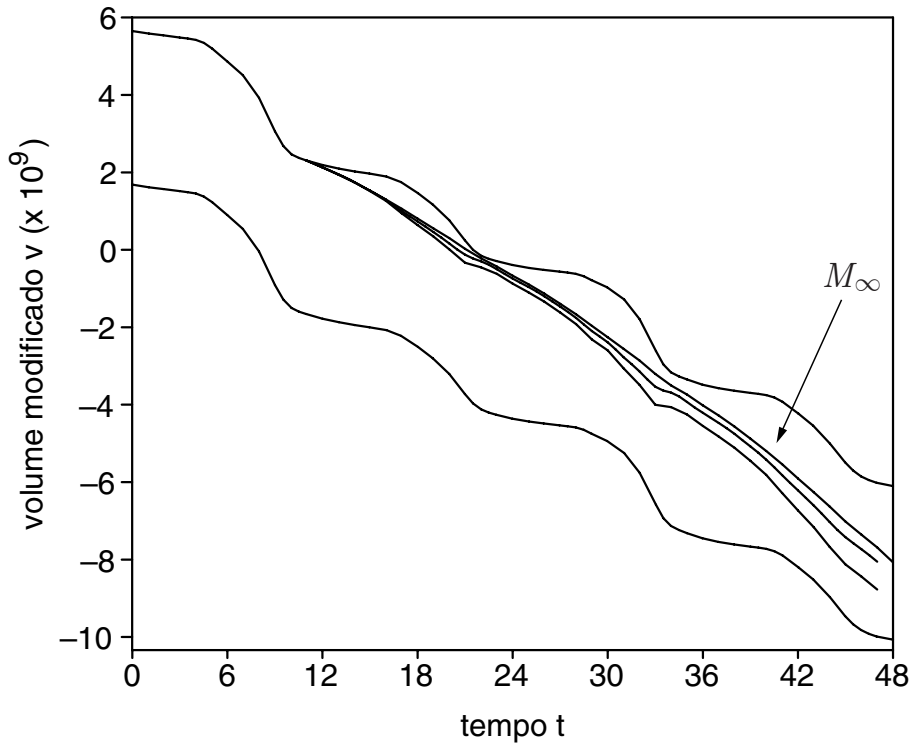


Figura 5.1: Geodésicas para  $M_{48}$ ,  $M_{96}$  e  $M_{\infty}$ .

ótima é garantida pelo teorema (2.1) As funções  $b = b(t)$  e  $d = d(t)$  foram obtidas por interpolação spline cúbica dos valores de  $b_t$  e  $d_t$ , respectivamente.

Primeiro, calculamos a geodésica (para trás)  $g_1$  começando de  $t = 48$  e  $\nu(48) = \underline{v} - B(48)$  com derivada  $-\bar{q}$ . Da proposição (4.1), a região hachurada  $R_1$  na figura (5.2) não contém pontos do caminho ótimo. A seguir, desenhamos a geodésica (para frente)  $g_2$  começando de  $t = 0$  e  $\nu(0) = v_0$  que é tangente a curva limite superior  $\bar{v} - B$  em  $t = 10.01$ . Esta geodésica corta as regiões hachuradas  $R_2$  e  $R_3$ .

A geodésica  $g_2$  não é admissível para  $t > 31.22$  porque  $g_2'(t) < -\bar{q}$  neste intervalo mas isto ocorre em uma região que já foi cortada.

Finalmente, calculamos a geodésica “mais baixa” que é tangente a curva limite superior  $\bar{v} - B$  e possui derivada  $-\bar{q}$  em  $t = 48$ . Esta geodésica atinge a curva limite superior em  $t = 10.89$  e exclui a região hachurada  $R_4$ . Como uma consequência, a operação ótima para  $t \in [0.00, 10.01]$  é dada pelo arco geodésico  $g_2$  e o caminho ótimo tem que ficar na região  $R_5$  que sobrou.

Argumentos locais podem agora ser aplicados: a operação ótima para  $t \in [10.01, 48.00]$  deve ser uma justaposição suave de uma pedaço da curva limite superior, um arco geodésico e um segmento de turbinamento máximo na



região  $R_5$ . Mais ainda, esta operação pode ser calculada com uma pesquisa unidimensional: desenhamos várias geodésicas começando de  $(t, \bar{v} - B(t))$  na curva limite superior, para cada  $t \in [10.01, 10.89]$  e, se necessário, fazemos uma justaposição suave com uma segmento de turbinamento máximo para manter admissibilidade. Comparando custos, encontramos que a operação ótima na região  $R_5$  ocorre para  $t = 10.32$ .

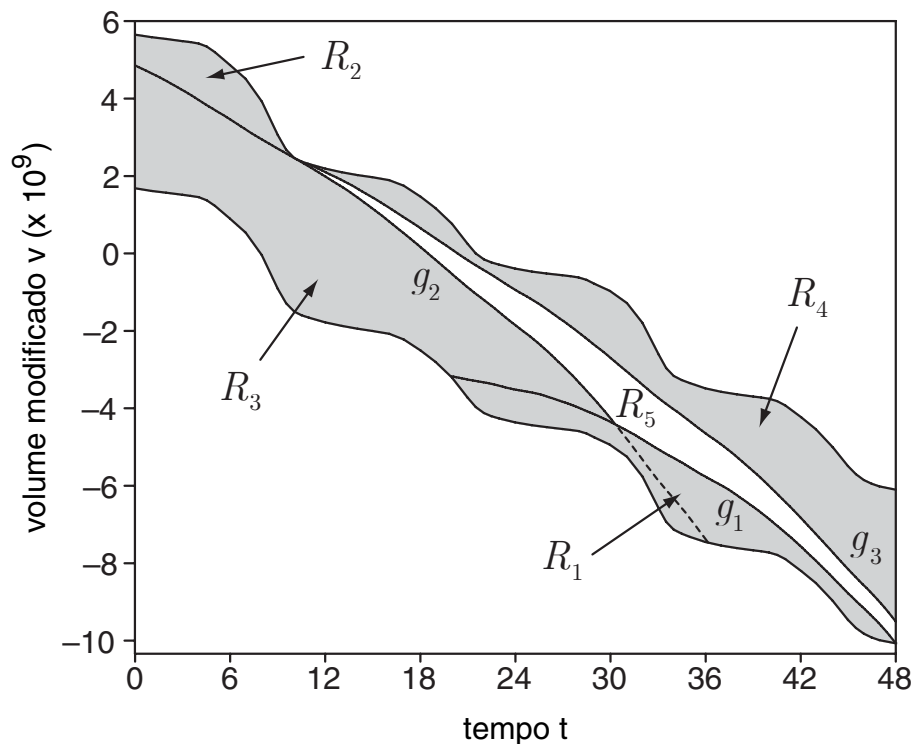


Figura 5.2: Usando geodésicas para cortar pedaços por onde a operação ótima não passa.

Resumindo, a operação ótima para a versão contínua do exemplo de El Cajón é uma justaposição suave do arco geodésico  $g_2$ , para  $t \in [0.00, 10.01]$ , a curva limite superior  $\bar{v} - B$  para  $t \in [10.01, 10.32]$ , um arco geodésico tangente começando de  $(10.32, \bar{v} - B(10.32))$  para  $t \in [10.32, 47.14]$  e, finalmente, um segmento de turbinamento máximo que termina em  $(48, \underline{v} - B(48))$ , para  $t \in [47.14, 48.00]$ .

As variáveis de estado para a operação ótima do modelo contínuo são mostradas na figura (5.3). As linhas tracejadas indicam as variáveis de estado correspondentes para o problema discreto  $M_{48}$ , obtido por técnicas de otimização convencionais na seção (1.4).

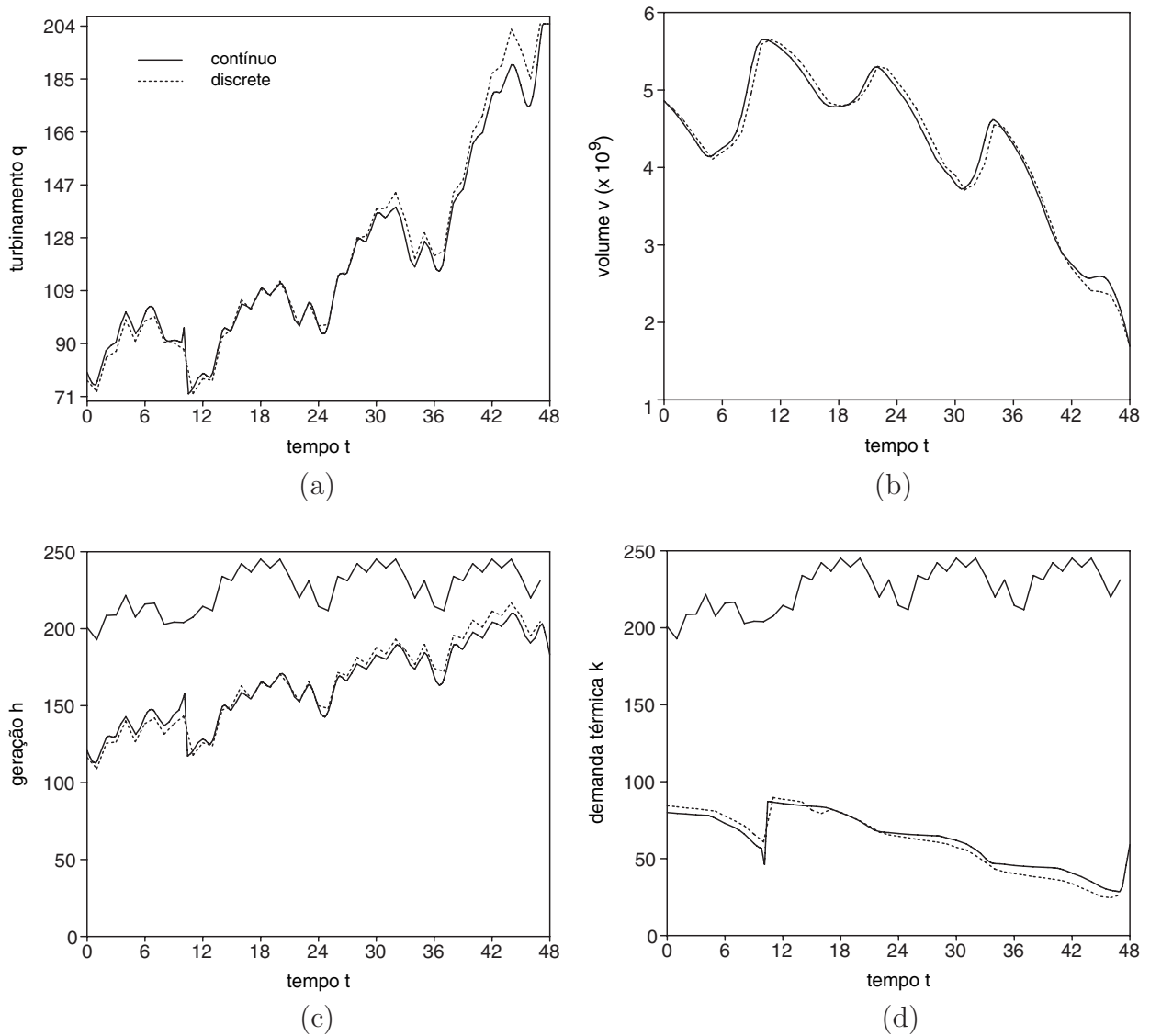


Figura 5.3: Operação ótima para a versão contínua do exemplo de El Cajón: (a) turbinamentos, (b) volumes, (c) gerações da usina hidroelétrica e (d) demandas térmicas.

# Apêndice 1

## Otimização em espaços de dimensão infinita

Neste apêndice, faremos uma rápida revisão das definições e teoremas envolvidos na teoria de otimização em espaços de dimensão infinita. As demonstrações podem ser encontradas nas referências [21] e [34].

### 1.1 Espaços vetoriais normados

**Definição 1.1** (ESPAÇOS VETORIAIS) Um *espaço vetorial* é formado por um conjunto de elementos (os vetores do espaço vetorial) junto com duas operações.

A primeira operação é a adição que associa, a cada par de vetores  $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in X$ , o vetor  $\mathbf{x} + \mathbf{y} \in X$  (a soma de  $\mathbf{x}$  e  $\mathbf{y}$ ). A segunda operação é a multiplicação por escalar que associa, a cada vetor  $\mathbf{x} \in X$  e a cada real  $\alpha \in \mathbb{R}$ , o vetor  $\alpha \cdot \mathbf{x} \in X$  (o múltiplo de  $\mathbf{x}$  por  $\alpha$ ).

O conjunto  $X$  e as operações de adição e multiplicação por escalar devem satisfazer as propriedades a seguir.

- (a)  $\mathbf{x} + \mathbf{y} = \mathbf{y} + \mathbf{x}$ . (lei comutativa)
- (b)  $(\mathbf{x} + \mathbf{y}) + \mathbf{z} = \mathbf{x} + (\mathbf{y} + \mathbf{z})$ . (lei associativa)
- (c) Existe um vetor nulo  $\mathbf{0}$  em  $X$  tal que  $\mathbf{x} + \mathbf{0} = \mathbf{x}$  para todo  $\mathbf{x} \in X$ .

$$(d) \alpha \cdot (\mathbf{x} + \mathbf{y}) = \alpha \cdot \mathbf{x} + \alpha \cdot \mathbf{y}. \quad (\text{lei distributiva})$$

$$(e) (\alpha + \beta) \cdot \mathbf{x} = \alpha \cdot \mathbf{x} + \beta \cdot \mathbf{y}. \quad (\text{lei distributiva})$$

$$(f) (\alpha \cdot \beta) \cdot \mathbf{x} = \alpha \cdot (\beta \cdot \mathbf{x}). \quad (\text{lei associativa})$$

$$(g) 0 \cdot \mathbf{x} = \mathbf{0} \quad \text{e} \quad 1 \cdot \mathbf{x} = \mathbf{x}.$$

Por conveniência, o vetor  $-1 \cdot \mathbf{x}$  será denotado por  $-\mathbf{x}$ .

**Definição 1.2** (SUBESPAÇOS VETORIAIS) Um subconjunto  $M$  de um espaço vetorial  $X$  é denominado um *subespaço* vetorial de  $X$  se para todo  $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in M$  e para todo  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$  vale que  $\alpha \cdot \mathbf{x} + \beta \cdot \mathbf{y} \in X$ .

**Definição 1.3** (COMBINAÇÕES LINEARES) Uma *combinação linear* dos vetores  $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_n$  em um espaço vetorial é uma soma da forma

$$\alpha_1 \cdot \mathbf{x}_1 + \alpha_2 \cdot \mathbf{x}_2 + \dots + \alpha_n \cdot \mathbf{x}_n,$$

com  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R}$ .

**Definição 1.4** (SUBESPAÇOS GERADOS) Seja  $S$  um subconjunto de um espaço vetorial  $X$ . O conjunto  $[S]$ , denominado o *subespaço gerado por  $S$* , consiste de todos os vetores em  $X$  que são combinações lineares de vetores de  $S$ .

**Definição 1.5** (INDEPENDÊNCIA LINEAR) Dizemos que um vetor  $\mathbf{x}$  é *linearmente dependente* de um subconjunto  $S$  de um espaço vetorial  $X$  se  $\mathbf{x}$  pode ser expresso como uma combinação linear de vetores de  $S$ . Dito de outra forma,  $\mathbf{x}$  é linearmente dependente de  $S$  se  $\mathbf{x}$  está em  $[S]$ , o subespaço gerado por  $S$ . Reciprocamente, dizemos que um vetor  $\mathbf{x}$  é *linearmente independente* de  $S$  se ele não é linearmente dependente de  $S$ . Um conjunto de vetores é denominado um *conjunto linearmente independente* se cada um de seus vetores é linearmente independente do conjunto formado pelos demais elementos.

**Proposição 1.1** Uma condição necessária e suficiente para que um conjunto de vetores  $\{\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_n\}$  seja linearmente independente é que a expressão  $\sum_{k=1}^n \alpha_k \cdot \mathbf{x}_k = \mathbf{0}$  implique em  $\alpha_k = 0$ , para todo  $k = 1, 2, 3, \dots, n$ .

**Corolário 1.1** Se  $\{\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_n\}$  é linearmente independente e se  $\sum_{k=1}^n \alpha_k \cdot \mathbf{x}_k = \sum_{k=1}^n \beta_k \cdot \mathbf{x}_k$ , então  $\alpha_k = \beta_k$ , para todo  $k = 1, 2, \dots, n$ .

**Definição 1.6** (DIMENSÃO DE UM ESPAÇO VETORIAL) Um conjunto finito  $S$  formado de vetores linearmente independentes é denominada uma base de um espaço vetorial  $X$  se  $S$  gera  $X$ , isto é,  $[S] = X$ . Se um espaço vetorial possui uma base finita então ele é denominado um espaço vetorial de dimensão finita (neste caso, a dimensão de  $X$  é o número de elementos de  $S$ ) e, caso contrário, um espaço vetorial de dimensão infinita.

**Exemplo 1.1** O conjunto formado por todos os polinômios  $p: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  é um espaço vetorial de dimensão infinita.

**Exemplo 1.2** O conjunto formado por todos os polinômios  $p: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  de grau menor ou igual a  $n$  é um espaço vetorial de dimensão finita.

**Teorema 1.1** Duas bases quaisquer de um espaço vetorial de dimensão finita possui o mesmo número de elementos (a dimensão do espaço).

**Definição 1.7** (ESPAÇO VETORIAL NORMADO) Um espaço vetorial normado é um espaço vetorial  $X$  munido de uma norma, isto é, de uma função  $\|\cdot\|: X \rightarrow \mathbb{R}$  que satisfaz

(a)  $\|\mathbf{x}\| \geq 0$  para todo  $\mathbf{x} \in X$  e  $\|\mathbf{x}\| = 0$  se, e somente se,  $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ .

(b)  $\|\alpha \cdot \mathbf{x}\| = |\alpha| \cdot \|\mathbf{x}\|$ , para todo  $\alpha \in \mathbb{R}$  e  $\mathbf{x} \in X$ .

(c)  $\|\mathbf{x} + \mathbf{y}\| \leq \|\mathbf{x}\| + \|\mathbf{y}\|$ , para todo  $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in X$ .

**Exemplo 1.3** O espaço vetorial  $X = \{f: [a, b] \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \text{ contínua}\}$  formado por todas as funções reais contínuas definidas no intervalo  $[a, b]$  com a norma do supremo

$$\|f\|_{\infty} = \max_{a \leq t \leq b} |f(t)|$$

é um espaço vetorial normado.

**Exemplo 1.4** O espaço vetorial  $Y = \{f: [a, b] \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \text{ contínua}\}$  formado por todas as funções reais contínuas definidas no intervalo  $[a, b]$  com a norma

$$\|f\|_1 = \int_a^b |f(t)| dt$$

é um espaço vetorial normado.

## 1.2 Espaços de Banach

**Definição 1.8** (SEQÜÊNCIAS DE CAUCHY) Uma seqüência  $(\mathbf{x}_n)$  em um espaço vetorial normado é denominada uma *seqüência de Cauchy* se  $\|\mathbf{x}_n - \mathbf{x}_m\| \rightarrow 0$  quando  $n, m \rightarrow \infty$ , isto é, dado  $\epsilon > 0$ , existe um natural  $N \in \mathbb{N}$  tal que  $n, m > N$  implica  $\|\mathbf{x}_n - \mathbf{x}_m\| < \epsilon$ .

**Proposição 1.2** Em um espaço vetorial normado, toda seqüência convergente é uma seqüência de Cauchy.

**Definição 1.9** (ESPAÇO DE BANACH) Um espaço vetorial normado  $X$  é *completo* se toda seqüência de Cauchy em  $X$  possui um limite em  $X$ . Um espaço vetorial normado completo é denominado um *espaço de Banach*.

**Proposição 1.3** Em um espaço vetorial normado, toda seqüência de Cauchy é limitada.

**Exemplo 1.5** O espaço vetorial  $X$  formado pelas funções contínuas definidas no intervalo  $[0, 1]$ , com a norma

$$\|f\|_1 = \int_0^1 |f(t)| dt$$

não é um espaço vetorial normado completo. De fato, considere a seqüência de funções

$$f_n(t) = \begin{cases} 0, & \text{para } 0 \leq t \leq 1/2 - 1/n, \\ nt - n/2 + 1, & \text{para } 1/2 - 1/n \leq t \leq 1/2, \\ 1, & \text{para } t \geq 1/2. \end{cases}$$

em  $X$ . Esta seqüência é de Cauchy pois  $\|f_n - f_m\|_1 = \frac{1}{2}|1/n - 1/m| \rightarrow 0$ . Contudo, não existe função contínua que seja limite da seqüência  $f_n$ .

**Exemplo 1.6** O conjunto  $C[a, b]$  das funções reais contínuas definidas no intervalo  $[a, b]$  com a norma do supremo  $\|f\|_\infty = \max_{a \leq t \leq b} |f(t)|$  é um espaço vetorial normado completo.

### 1.3 O teorema de Weierstrass

**Definição 1.10** (CONJUNTOS COMPACTOS) Um conjunto  $K$  de um espaço normado  $X$  é *compacto* se toda seqüência  $(\mathbf{x}_n)$  de pontos em  $X$  possui uma subseqüência que converge para um elemento  $\mathbf{x}$  em  $K$ .

Em dimensão finita, um conjunto é compacto se, e somente se, ele é fechado e limitado mas, em dimensão infinita, nem todo conjunto fechado e limitado é compacto.

**Teorema 1.2** Toda função contínua definida em um conjunto compacto  $K$  não-vazio possui extremos globais em  $K$ .

**Exemplo 1.7** Considere a função  $F$  definida em  $C[0, 1]$ :

$$F(f) = \int_0^{1/2} f(t) dt - \int_{1/2}^1 f(t) dt.$$

É fácil de ver que  $f$  é contínua desde que  $|F(f)| \leq \|f\|_\infty$ . O supremo de  $f$  na esfera unitária em  $C[0, 1]$  é 1, mas nenhuma função contínua de norma menor ou igual a 1 atinge este supremo. Isto mostra que a esfera unitária em  $C[0, 1]$ , apesar de fechada e limitada, não é compacta.

## 1.4 Um exemplo interessante

Se  $X$  e  $Y$  são espaços vetoriais normados de dimensão *finita*, não é difícil de se provar que *qualquer* transformação linear  $T: X \rightarrow Y$  é contínua. Contudo, isto não é mais verdade para espaços de dimensão infinita. Como um exemplo, considere  $X = C[0, 1]$ , o espaço vetorial formado pelas funções contínuas definidas no intervalo  $[0, 1]$ , com a norma  $\|f\|_1 = \int_a^b |f(t)| dt$  e a transformação  $T(f) = f(0)$ . Claramente  $T$  é linear. Contudo,  $T$  não é contínua em  $f = 0$ . Para ver isto, considere a seqüência de funções  $f_n$  definidas na figura abaixo.

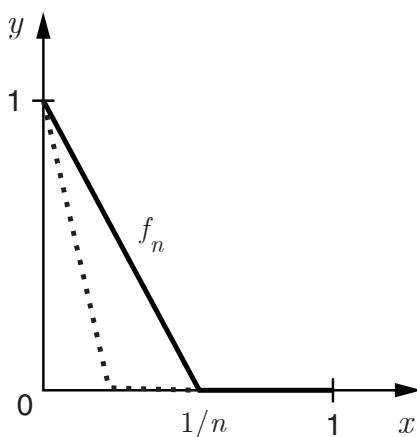


Figura 1.1:  $\|f_n\|_1 \rightarrow 0$  mas  $T(f_n) \rightarrow 1$ .

Claramente,  $\|f_n\|_1 \rightarrow 0$  mas  $T(f_n) = f_n(0) = 1 \rightarrow 1 \neq 0$ . Portanto,  $T$  não é contínua em  $f = 0$ . Por outro lado, se considerarmos  $X = C[0, 1]$  com a norma  $\|f\|_\infty = \max_{0 \leq t \leq 1} |f(t)|$  segue-se  $T(f) = f(0)$  é uma transformação linear contínua pois  $|T(f)| = |f(0)| \leq \|f\|_\infty$ .



## 1.5 Extremos locais

**Definição 1.11** (EXTREMOS LOCAIS) Sejam  $X$  um espaço vetorial normado e  $F: X \rightarrow \mathbb{R}$  uma função definida em  $X$ . Dizemos que  $\mathbf{p} \in X$  é um *mínimo local* de  $F$  em  $X$  se existe uma bola aberta

$$B_r(\mathbf{p}) = \{\mathbf{x} \in X \mid \|\mathbf{x} - \mathbf{p}\| < r\}$$

de centro em  $\mathbf{p}$  e raio  $r > 0$ , tal que  $F(\mathbf{x}) \leq F(\mathbf{p})$  para todo  $\mathbf{x} \in B_r \cap X$ . Analogamente, dizemos que  $\mathbf{p} \in X$  é um *máximo local* de  $F$  em  $X$  se existe uma bola aberta

$$B_r(\mathbf{p}) = \{\mathbf{x} \in X \mid \|\mathbf{x} - \mathbf{p}\| < r\}$$

de centro em  $\mathbf{p}$  e raio  $r > 0$  tal que  $F(\mathbf{x}) \geq F(\mathbf{p})$  para todo  $\mathbf{x} \in B_r \cap X$ .

**CUIDADO!**

**CUIDADO!**

**CUIDADO!**

A definição de extremo local depende da norma usada! Seja  $X$  o espaço vetorial das funções contínuas definidas no intervalo  $[0, 1]$ . Considere a função  $F: X \rightarrow \mathbb{R}$  definida em  $X$  por  $F(f) = 2f(0)^3 - 3f(0)^2$ .

- (a) Mostre que a função constante  $f^* \equiv 1$  é um mínimo local de  $F$  em  $X$  com a norma  $\|\cdot\|_\infty$ . Dica: mostre que se  $f \in B_1(f^*)$ , então  $F(f) \geq -1 = F(f^*)$  e, para isto, considere o problema de minimizar o polinômio  $p(t) = 2t^3 - 3t^2$  para  $t \in (0, 2)$ .
- (b) Mostre que a função constante  $f^* \equiv 1$  não é um mínimo local de  $F$  em  $X$  com a norma  $\|\cdot\|_1$ . Dica: considere a função contínua

$$f_\epsilon(x) = \begin{cases} -1 + 2x/\epsilon, & \text{para } 0 \leq x \leq \epsilon, \\ 1, & \text{para } \epsilon < x \leq 1, \end{cases}$$

para cada  $\epsilon > 0$  e mostre que  $\|f_\epsilon - f^*\|_1$  pode ser feito tão pequeno quanto se queira desde que  $\epsilon$  seja suficientemente pequeno, enquanto que  $F(f_\epsilon) = -5 < F(f^*)$  para todo  $\epsilon > 0$ .

Por outro lado, se o espaço vetorial normado é de dimensão finita, então

o conceito de extremo local *independe* da norma, uma vez que em espaços de dimensão finita, todas as normas são equivalentes. O conceito de extremo global independe da norma escolhida, seja o espaço vetorial normado de dimensão finita ou não.

## 1.6 Derivadas direcionais

**Definição 1.12** (VARIACÕES DE GATEAUX) Sejam  $\mathbf{p}, \mathbf{v} \in X$ . A *variação de Gateaux* de uma função  $F: X \rightarrow \mathbb{R}$  no ponto  $\mathbf{p}$  na direção  $\mathbf{v}$  é definida por

$$\delta F(\mathbf{x}, \mathbf{v}) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{F(\mathbf{p} + \epsilon \cdot \mathbf{v}) - F(\mathbf{p})}{\epsilon}$$

desde que o limite exista. Nesta definição, observe que  $\mathbf{p}$  e  $\mathbf{v}$  estão fixos e o limite é tomado com relação a variável real  $\epsilon$ . A existência do limite pressupõe que  $F$  esteja definida em  $\mathbf{p}$  e em  $\mathbf{p} + \epsilon \cdot \mathbf{v}$  para todo  $\epsilon > 0$  suficientemente pequeno. Desta maneira,

$$\delta F(\mathbf{p}, \mathbf{v}) = \left. \frac{d}{d\epsilon} F(\mathbf{p} + \epsilon \cdot \mathbf{v}) \right|_{\epsilon=0}.$$

**Exemplo 1.8** Seja  $X = C[a, b]$  e  $F: X \rightarrow \mathbb{R}$  definida por

$$F(f) = \int_a^b [\text{sen}^3(t) + (f(t))^2] dt.$$

Assim, para  $f, \phi \in X$  fixos, temos que  $f + \epsilon \cdot \phi \in X$ , uma vez que  $X$  é um espaço vetorial. Logo, faz sentido calcular  $F$  em  $f + \epsilon \cdot \phi$ :

$$F(f + \epsilon \cdot \phi) = \int_a^b [\text{sen}^3(t) + (f(t) + \epsilon \cdot \phi(t))^2] dt.$$

Desta maneira,

$$\begin{aligned} \delta F(f, \phi) &= \left. \frac{d}{d\epsilon} F(f + \epsilon \cdot \phi) \right|_{\epsilon=0} \\ &= \left. \frac{d}{d\epsilon} \left( \int_a^b [\text{sen}^3(t) + (f(t) + \epsilon \cdot \phi(t))^2] dt \right) \right|_{\epsilon=0}. \end{aligned}$$

Mas

$$\frac{d}{d\epsilon} \int_a^b [\text{sen}^3(t) + (f(t) + \epsilon \cdot \phi(t))^2] \Big|_{\epsilon=0} dt = \int_a^b [2 \cdot (f(t) + \epsilon \cdot \phi(t)) \cdot \phi(t)] \Big|_{\epsilon=0} dt.$$

Portanto,

$$\delta F(f, \phi) = 2 \int_a^b f(t) \cdot \phi(t) dt.$$

## 1.7 A regra de Fermat em espaços de dimensão infinita

**Teorema 1.3** (REGRA DE FERMAT) Sejam  $X$  um espaço vetorial normado,  $D$  um subconjunto de  $X$  e  $F: D \subset X \rightarrow \mathbb{R}$  uma função definida em  $D$ . Se  $\mathbf{p} \in D$  é um extremo local de  $F$  em  $D$ ,  $\mathbf{v} \in X$  é tal que  $F$  está definida em  $\mathbf{p} + \epsilon \cdot \mathbf{v}$  para todo  $\epsilon$  suficientemente pequeno, e existe a variação de Gateaux  $\delta F(\mathbf{p}, \mathbf{v})$  de  $F$  no ponto  $\mathbf{p}$  na direção  $\mathbf{v}$ , então

$$\delta F(\mathbf{p}, \mathbf{v}) = 0.$$

**Exemplo 1.9** seja  $X = C[a, b]$  e  $D = \{f \in C[a, b] \mid f(a) = \underline{f} \text{ e } f(b) = \overline{f}\}$ . Vamos mostrar que a função

$$F(f) = \int_a^b [\text{sen}^3(t) + (f(t))^2] dt$$

não possui extremos locais em  $D$  se  $\underline{f}$  e  $\overline{f}$  não são simultaneamente nulos. Para isto vamos calcular variações de Gateaux de  $F$  em  $f$  na direção  $\phi$ . Se  $f$  está em  $D$ , a fim que  $f + \epsilon \cdot \phi$  também esteja em  $D$ , é necessário que

$$(f + \epsilon \cdot \phi)(a) = \underline{f} \quad \text{e} \quad (f + \epsilon \cdot \phi)(b) = \overline{f}.$$

Como  $f(a) = \underline{f}$  e  $f(b) = \overline{f}$ , segue-se que  $\phi(a) = \phi(b) = 0$ . Logo, só podemos calcular variações de Gateaux para direções  $\phi$  no conjunto

$$A = \{\phi \in X \mid \phi(a) = \phi(b) = 0\}.$$

Pela regra de Fermat, se  $F$  possuísse um extremo local, então

$$\delta F(f, \phi) = 2 \int_a^b f(t) \cdot \phi(t) dt = 0$$

para todo  $\phi \in A$ . Como  $f$  é uma função contínua, devemos ter  $f = 0$  em  $[a, b]$ . Mas isto contradiz o fato de que  $f(a) = \underline{f}$ ,  $f(b) = \overline{f}$  e  $\underline{f}$  e  $\overline{f}$  não são simultaneamente nulos.

## 1.8 Os lemas de du Bois-Reymond e Lagrange

**Lema 1.1** (LEMA DE DU BOIS-REYMOND) Seja  $h \in C[a, b]$  tal que  $\int_a^b h(t) \cdot v'(t) dt = 0$  para todo  $\phi$  no conjunto

$$A = \{\phi \in C^1[a, b] \mid \phi(a) = \phi(b) = 0\},$$

então  $h = \text{constante}$  em  $[a, b]$ .

*Demonstração.* Seja  $c$  uma constante (a ser determinada posteriormente) e considere a função

$$\phi(t) = \int_a^t (h(\tau) - c) d\tau.$$

Pelo teorema fundamental do cálculo, certamente  $\phi$  pertence a  $C^1[a, b]$ . Mais ainda,  $\phi'(t) = h(t) - c$  e  $\phi(a) = 0$ . A fim de que  $\phi$  também pertença a  $A$ , é necessário que  $\phi(b) = 0$ . Para isto, basta escolher a constante  $c$  como

$$c = \frac{1}{b-a} \int_a^b h(\tau) d\tau.$$

pois, desta maneira, vale que

$$\begin{aligned} 0 &\leq \int_a^b (h(\tau) - c)^2 d\tau = \int_a^b (h(\tau) - c) \cdot \phi'(\tau) d\tau \\ &= \int_a^b h(\tau) \cdot \phi'(\tau) d\tau - c \cdot \phi'(t) \Big|_a^b = 0. \end{aligned}$$

Como  $(h-c)^2$  é uma função contínua não-negativa, concluímos que  $h(t) - c = 0$ , para todo  $t \in [a, b]$ , isto é,  $h(t) = c$ , para todo  $t \in [a, b]$ . ■

**Proposição 1.4** Sejam  $g, h \in C[a, b]$  tais que

$$\int_a^b [g(\tau) \cdot \phi(\tau) + h(\tau) \cdot \phi'(\tau)] d\tau = 0,$$

para todo  $\phi$  no conjunto

$$A = \{\phi \in C^1[a, b] \mid \phi(a) = \phi(b) = 0\},$$

então  $h \in C^1[a, b]$  e  $h' = g$ .

*Demonstração.* Considere

$$G(t) = \int_a^t g(\tau) d\tau.$$

Então, pelo teorema fundamental do cálculo,  $G \in C^1[a, b]$  e  $G' = g$ . Integrando-se por partes, obtemos que

$$\begin{aligned} \int_a^b [g(\tau) \cdot \phi(\tau) + h(\tau) \cdot \phi'(\tau)] d\tau &= \int_a^b [h(\tau) - G(\tau)] \cdot \phi'(\tau) d\tau + G(t) \cdot \phi(t) \Big|_a^b \\ &= \int_a^b [h(\tau) - G(\tau)] \cdot \phi'(\tau) d\tau, \end{aligned}$$

uma vez que  $\phi(a) = \phi(b) = 0$ . Como  $\int_a^b [g(\tau) \cdot \phi(\tau) + h(\tau) \cdot \phi'(\tau)] d\tau = 0$ , segue-se que

$$\int_a^b [h(\tau) - G(\tau)] \cdot \phi'(\tau) d\tau = 0,$$

para todo  $\phi \in A$ . Pelo lema de du Bois-Reymond, segue-se que  $h - G = c =$  constante em  $[a, b]$ . Desta maneira,  $h = G + c \in C^1[a, b]$  e  $h' = G' = g$ . ■

**Corolário 1.2** (LAGRANGE) Se  $g \in C[a, b]$  e  $\int_a^b g(\tau) \cdot \phi(\tau) d\tau = 0$  para todo  $\phi$  no conjunto

$$A = \{\phi \in C^1[a, b] \mid \phi(a) = \phi(b) = 0\},$$

então  $g = 0$  em  $[a, b]$ .

*Demonstração.* Considere  $h = 0$  na proposição anterior. ■

## 1.9 O teorema de Ascoli-Arzelá

**Definição 1.13** (SEQÜÊNCIAS EQÜICONTÍNUAS) Seja  $X$  um espaço vetorial normado. Diz-se que a seqüência de funções  $f_n: X \rightarrow \mathbb{R}$  é *eqüicontínua* no ponto  $\mathbf{p} \in X$  quando, dado  $\epsilon > 0$ , existe  $\delta > 0$  tal que se  $\mathbf{x} \in X$  e  $\|\mathbf{x} - \mathbf{p}\| < \delta$ , então  $|f_i(\mathbf{x}) - f_i(\mathbf{p})| < \epsilon$ , para cada função  $f_i$ . Se  $f_n$  é eqüicontínua em todo ponto  $\mathbf{p}$  de  $X$ , então diremos simplesmente que  $f_n$  é uma seqüência *eqüicontínua*.

**Definição 1.14** (SEQÜÊNCIAS SIMPLEMENTE LIMITADAS) Seja  $X$  um espaço vetorial normado. Uma seqüência de funções  $f_n: X \rightarrow \mathbb{R}$  diz-se *simplesmente limitada* quando, para cada  $\mathbf{x} \in X$ , existe  $c_{\mathbf{x}} > 0$  tal que  $|f_i(\mathbf{x})| \leq c_{\mathbf{x}}$  para cada função  $f_i$ .

**Teorema 1.4** (DE ARZELÁ-ASCOLI) Sejam  $X$  um espaço vetorial normado e  $K$  um subconjunto compacto de  $X$ . Toda seqüência eqüicontínua e simplesmente limitada de funções  $f_n: K \rightarrow \mathbb{R}$  possui uma subseqüência uniformemente convergente.

## 1.10 Funções absolutamente contínuas

**Definição 1.15** (FUNÇÖES ABSOLUTAMENTE CONTÍNUAS) Diz-se que uma função  $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  é *absolutamente contínua* no intervalo  $[a, b]$  se, dado  $\epsilon > 0$ , existe  $\delta > 0$  tal que

$$\sum_{i=1}^n |f(x_i) - f(\tilde{x}_i)| < \epsilon,$$

para toda coleção finita  $\{(x_i, \tilde{x}_i)\}$  de intervalos disjuntos que satisfaz

$$\sum_{i=1}^n |x_i - \tilde{x}_i| < \delta.$$

**Teorema 1.5** Uma função  $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  é absolutamente contínua em  $[a, b]$  se, e somente se,

$$f(x) = \int_a^x f'(t)dt + f(a),$$

ou seja, se  $f$  satisfaz o teorema fundamental do cálculo.





# Bibliografia

- [01] D. N. Arnold, *Lecture Notes on Functional Analysis*, Penn State, Department of Mathematics, Penn State University, 1997.
- [02] H. J. Bortolossi, *Operação Hidrotérmica de um Sistema com Uma Usina Hidroelétrica e Várias Usinas Térmicas*, tese de doutorado, departamento de matemática, PUC-Rio, 1999.
- [03] H. J. Bortolossi, *Cálculo Diferencial a Várias Variáveis, Uma Introdução à Teoria de Otimização*, Rio de Janeiro, Editora PUC-Rio, 2002.
- [04] H. J. Bortolossi, M. V. Pereira e C. Tomei, *Optimal Hydrothermal Scheduling with Variable Production Coefficient*, *Mathematical Methods of Operations Research*, 55, pp. 11–36, 2002.
- [05] P. V. Calux, *Operação Ótima de um Sistema Hidrotérmico: O Caso de Hidrelétricas em Paralelo*, tese de mestrado, departamento de matemática, PUC-Rio, 2001.
- [06] B. H. Chowdhury e S. Rahman, *A Review of Recent Advances in Economic Dispatch*, *IEEE Transactions on Power Systems*, 5 (4), pp. 1248-1259, 1990.
- [07] G. S. Christensen, M. E. El-Hawary e S. A. Soliman, *Optimal Control Applications in Electric Power Systems*, Plenum Press, New York, 1987.
- [08] D. Z. Chen, *Developing Algorithms and Software for Geometric Path Planning Problems*, *ACM Computing Surveys* 28A(4), 1996.
- [09] L. Cooper e M. W. Cooper, *Introduction to Dynamic Programming*, Pergamon Press, Southern Methodist University, Dallas, Texas, 1981.

- [10] N. Dinh, H. X. Phu, *The Method of Orienting Curves and its Application to an Optimal Control Problem of Hydroelectric Power Plants*, Journal of Mathematics (*Tap chí Toán học*), 20, pp. 40-53, 1992.
- [11] N. Dinh, H. X. Phu, *Solving a Class of Regular Optimal Control Problems with State Constraints by the Method of Orienting Curves*, Optimization, 25, pp. 231-247, 1992.
- [12] N. Dunford e J. T. Schwartz, *Linear Operators*, New York, Interscience, 1957-1971.
- [13] J. Frehse, *Existence of Optimal Controls, I*, Oper. Res.-Verf., 30, pp. 26-59, 1979.
- [14] S. Feltenmark e P. O. Lindberg, *Network Methods for Head-dependent Hydro Power Planning*, Lecture Notes in Economics and Mathematical Systems, 450, pp. 249-264, 1997.
- [15] B. G. Gorenstin, N. M. Campodónico, J. P. Costa e M. V. F. Pereira, *Power System Expansion Planning under Uncertainty*, IEEE Transactions on Power Systems, 8 (1), pp. 129-136, 1993.
- [16] M. A. Hanscom, L. Lafond, L. Lasdon, G. Pronovost, *Modelling and Resolution of the Medium Term Energy Generation Planning Problem for a Large Hydro-Electric System*, Management Science, 26 (7), pp. 659-668, 1980.
- [17] M. Huneault e F. D. Galiana, *A Survey of the Optimal Power Flow Literature*, IEEE Transactions on Power Systems, 6 (2), pp. 762-770, 1991.
- [18] D. Kincaid e W. Cheney, *Numerical Analysis: Mathematics of Scientific Computing*, Brooks/Cole Publishing Co., Pacific Grove, California, 1991.
- [19] E. L. Lima, *Curso de Análise*, volume 1, Rio de Janeiro, Instituto de Matemática Pura e Aplicada, CNPq, 1976.
- [20] E. L. Lima, *Curso de Análise*, volume 2, Rio de Janeiro, Instituto de Matemática Pura e Aplicada, CNPq, 2000.
- [21] D. G. Luenberger, *Optimization by Vector Space Methods*, New York, John Wiley & Sons, Inc., 1969.

- [22] D. G. Luenberger, *Linear and Nonlinear Programming*, second edition, Reading, Massachusetts, Addison-Wiley Publishing Company, 1989.
- [23] N. Maculan, M. Minoux e G. Plateau, *An  $O(n)$  Algorithm for Projecting a Vector on the Intersection of a Hyperplane and  $\mathbb{R}_+^n$* , RAIRO Operation Research, 31, pp. 7-16, 1997.
- [24] J. S. B. Mitchell, *Shortest Paths and Networks*, In Goodman JE, O'Rourke J (ed.) Handbook of Discrete and Computational Geometry. CRC Press LLC, Boca Raton, FL, pp. 445-466, 1997.
- [25] T. Ohishi, S. Soares e M. F. H. Carvalho, *A Short Term Hydrothermal Scheduling Approach for Dominantly Hydro Systems*, IEEE Transactions On Power Systems, 6 (2), pp. 637-643, 1991.
- [26] M. V. F. Pereira, *Optimal Stochastic Operations Scheduling of Large Hydroelectric Systems*, International Journal of Electric Power and Energy Systems, 11, pp. 161-169, 1989.
- [27] M. Pereira, N. C. Campodónico e R. Kelman, *Application of Stochastic Dual DP and Extensions to Hydrothermal Scheduling*, PSRI Technical Report 012/99, 1999.  
<http://www.psr-inc.com/psr/download/extensions.pdf>.
- [28] M. V. F. Pereira e L. M. V. G. Pinto, *Stochastic Optimization of a Multireservoir Hydroelectric System, a Decomposition Approach*. Water Resources Research, 21, pp. 779-792, 1985.
- [29] M. V. F. Pereira e L. M. V. G. Pinto, *Multistage Stochastic Optimization Applied to Energy Planning*, Mathematical Programming, 52, 1991.
- [30] R. C. M. Persiano. *Operação Ótima de Sistemas de Geração Hidro-térmica*, tese de doutorado, UFRJ, Rio de Janeiro, 1976.
- [31] H. X. Phu, *Method of Orienting Curves for Solving Optimal Control Problems with State Constraints*, Numerical Functional Analysis and Optimization, 12, pp. 172-211, 1991.
- [32] M. Reed e B. Simon, *Methods of Modern Mathematical Physics, I: Functional Analysis*, Academic Press, New York, 1970.

- [33] C. Suano, M. E. Pineiro e M. Pereira, *Representation of Hydro Plant Head Variation in the SDDP Algorithm*, PSRI Technical Report, 1997.
- [34] J. L. Troutman, *Variational Calculus with Elementary Convexity*, Springer-Verlang, New York, 1983.
- [35] J. F. Weng, *Shortest Networks for Smooth Curves*, SIAM Journal of Optimization, vol. 7, n. 4, pp. 1054-1068, November 1997.
- [36] A. J. Wood e B. F. Wollenberg, *Power Generation, Operation and Control*, Second edition. John Wiley & Sons, New York, 1996.

