Uma Introdução à Otimização sob Incerteza
Aula 3

Bernardo Kulnig Pagnoncelli[1] e Humberto José Bortolossi[2]

[1]Departamento de Matemática
Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro

[2]Departamento de Matemática Aplicada
Universidade Federal Fluminense

III Bienal da SBM
Universidade Federal de Goiás

6 a 10 de novembro de 2006

Quem fez o dever de casa?

(Exercício [05] do Capítulo 3)

A solução está valendo um chocolate!

Quem fez o dever de casa?

$$\text{minimizar}$$
$$x_1 + x_2 + q_1\,\mathbb{E}_{\omega_1}\left[(\omega_1\,x_1 + x_2 - 7)^-\right] + q_2\,\mathbb{E}_{\omega_2}\left[(\omega_2\,x_1 + x_2 - 4)^-\right]$$
$$\text{sujeito a } x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0,$$

é equivalente a

$$\begin{array}{ll} \text{minimizar} & g(x_1, x_2) = x_1 + x_2 + Q(x_1, x_2) \\ \text{sujeito a} & x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0, \end{array}$$

onde

$$Q(x_1, x_2) = \mathbb{E}\left[\min_{y_1 \geq 0,\ y_2 \geq 0} \left\{ q_1 y_1 + q_2 y_2 \;\middle|\; \begin{array}{lr} \omega_1\,x_1 + x_2 + y_1 & \geq 7 \\ \omega_2\,x_1 + x_2 \qquad + y_2 & \geq 4 \end{array} \right\}\right].$$

Otimização estocástica

- Espere e Veja (Wait and See)
- Aqui e Agora (Here and Now)

1. Eliminar incertezas.
2. Incorporar riscos nas restrições (chance constraints).
   a. Níveis de confiabilidade individuais.
   b. Nível de confiabilidade conjunto.
3. Aceitar inadmissibilidade penalizando déficits.

O problema da produção

- Minimizar do custo de produção $c\,x$ sob a restrição de que a produção x atenda à demanda ω:

$$\boxed{\begin{array}{rr} \text{minimizar} & f(x) = c\,x \\ \text{sujeito a} & x = \omega, \\ & x \geq 0, \end{array}}$$

- A demanda ω é uma variável aleatória contínua não-negativa, com

O problema da produção

- Minimizar do custo de produção $c\,x$ sob a restrição de que a produção x atenda à demanda ω:

$$\boxed{\begin{array}{rr} \text{minimizar} & f(x) = c\,x \\ \text{sujeito a} & x = \omega, \\ & x \geq 0, \end{array}}$$

- A demanda ω é uma variável aleatória contínua não-negativa, com

1. Média: $\mu = \mathbb{E}\,[\omega]$.
2. Variância: $\sigma^2 = \mathbb{E}\left[(\omega - \mathbb{E}\,[\omega])^2\right]$.
3. Função distribuição: $F(t) = \mathbb{P}\,(\omega \leq t)$, com $t \in \mathbb{R}$.

O problema da produção

- Abordagem "espere e veja"
  Se o agente de decisão pode esperar pela realização da demanda ω antes de escolher o valor da produção x, então o problema é fácil se resolver: $x^*(\omega) = \omega$ e $v^*(\omega) = c\,x^*(\omega) = c\,\omega$.

O problema da produção

- Abordagem "espere e veja"
  Se o agente de decisão pode esperar pela realização da demanda ω antes de escolher o valor da produção x, então o problema é fácil se resolver: $x^*(\omega) = \omega$ e $v^*(\omega) = c\,x^*(\omega) = c\,\omega$.

- Abordagem "aqui e agora"

  1. Abolir incertezas
     Substituir ω por $\widehat{\omega} = \mu$ ou $\widehat{\omega} = \mu + \Delta$ (com $\Delta = \sigma$ ou $\Delta = 2\,\sigma$).
     Probabilidade de que a demanda seja satisfeita (nível de serviço):

$$\mathbb{P}\,(\omega \leq \mu + \Delta) = F(\mu + \Delta).$$

O problema da produção

- Abordagem “aqui e agora”

  2. Incorporar riscos nas restrições

     Construir uma restrição probabilística do tipo $\mathbb{P}\,(x = \omega) \geq \alpha$ não é conveniente.

- Abordagem "aqui e agora"

2. Incorporar riscos nas restrições

   Construir uma restrição probabilística do tipo $\mathbb{P}(x = \omega) \geq \alpha$ não é conveniente.

   Para valores adequados de α_1 e α_2, também não é conveniente construir restrições probabilísticas combinadas:

$$\mathbb{P}(x \geq \omega) \geq \alpha_1 \quad \text{e} \quad \mathbb{P}(x \leq \omega) \geq \alpha_2.$$

- Abordagem “aqui e agora”

  2. Incorporar riscos nas restrições

     Construir uma restrição probabilística do tipo $\mathbb{P}(x = \omega) \geq \alpha$ não é conveniente.

     Para valores adequados de α_1 e α_2, também não é conveniente construir restrições probabilísticas combinadas:

     $$\mathbb{P}(x \geq \omega) \geq \alpha_1 \quad \text{e} \quad \mathbb{P}(x \leq \omega) \geq \alpha_2.$$

     É preciso estabelecer prioridades: escolha $\alpha \in (1/2, 1)$ e modele o problema da mistura como

     $$\min_{x \geq 0} \{cx \mid \mathbb{P}(x \geq \omega) \geq \alpha\} = \min_{x \geq 0} \{cx \mid x \geq F^{-1}(\alpha)\}$$

     cuja solução é, evidentemente, $x^* = F^{-1}(\alpha)$.

- Abordagem “aqui e agora”

3. Aceitar inadmissibilidade, penalizando desvios

Penalizamos superávits e déficits:

$$Q(x) = \mathbb{E}\left[h \cdot (\omega - x)^- + q \cdot (\omega - x)^+\right],$$

onde

$$z^- = \begin{cases} 0, & \text{se } z \geq 0, \\ -z, & \text{se } z < 0, \end{cases} \quad \text{e} \quad z^+ = \begin{cases} z, & \text{se } z \geq 0, \\ 0, & \text{se } z < 0, \end{cases}$$

O problema original fica então assim:

$$\boxed{\begin{array}{rc} \text{minimizar} & f(x) = c\,x + Q(x) \\ \text{sujeito a} & x \geq 0, \end{array}}$$

O problema da produção

- Abordagem “aqui e agora”

3. Aceitar inadmissibilidade, penalizando desvios

Como
$$f'(x) = c + Q'(x) = c - q + (q + h)\,F(x),$$
segue-se que a solução ótima é dada por
$$x^* = F^{-1}\left(\frac{q-c}{q+h}\right).$$

- Abordagem “aqui e agora”

3. Aceitar inadmissibilidade, penalizando desvios

Como

$$f'(x) = c + Q'(x) = c - q + (q + h)\, F(x),$$

segue-se que a solução ótima é dada por

$$x^* = F^{-1}\left(\frac{q - c}{q + h}\right).$$

Se $h = 0$, esta solução coincide com a solução obtida por chance constraints se

$$\frac{q}{c} = \frac{1}{1 - \alpha}.$$

- Abordagem “aqui e agora”

3. Aceitar inadmissibilidade, penalizando desvios

α (nível de confiabilidade)	q/c (custo de déficit/custo de produção)
0.990	100
0.975	40
0.950	20
0.900	10
0.800	5
0.500	2

Esta tabela é interessante: ela nos dá uma idéia de que valores escolher para o custo q em termos do nível de confiabilidade α.

Modelos de Recurso

$$\boxed{\min_{\mathbf{x} \in \mathbf{X}} \{\mathbf{cx} \mid \mathbf{Ax} = \mathbf{b} \text{ e } \mathbf{Tx} \sim \mathbf{h}\}}$$

onde

- $\mathbf{X} = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid \underline{\mathbf{x}} \leq \mathbf{x} \leq \overline{\mathbf{x}}\}$ ou $\mathbf{X} = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid \mathbf{0} \leq \mathbf{x} < +\infty\}$,
- $\mathbf{c} \in \mathbb{R}^n$, $\mathbf{A}$ é $\widetilde{m} \times n$, $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^{\widetilde{m}}$, $\mathbf{T}$ é $m \times n$, $\mathbf{h} \in \mathbb{R}^m$,
- $\mathbf{cx} = c_1 \cdot x_1 + c_2 \cdot x_2 + \cdots + c_n \cdot x_n = \sum_{i=1}^{n} c_i \cdot x_i$,
- o símbolo $\sim$ representa uma das relações $=$, $\geq$ e $\leq$ (componente a componente).

Motivação: programação linear por metas

$$\boxed{\min_{\mathbf{x} \in \mathbf{X}} \{\mathbf{cx} \mid \mathbf{Ax} = \mathbf{b} \text{ e } \mathbf{Tx} \sim \mathbf{h}\}}$$

- Restrições rígidas : $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$.

Motivação: programação linear por metas

$$\boxed{\min_{\mathbf{x}\in\mathbf{X}} \{\mathbf{cx} \mid \mathbf{Ax} = \mathbf{b} \text{ e } \mathbf{Tx} \sim \mathbf{h}\}}$$

- Restrições rígidas : $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$.
- Restrições flexíveis: $\mathbf{Tx} \sim \mathbf{h}$.

$$\boxed{\min_{\mathbf{x}\in\mathbf{X}} \{\mathbf{cx} \mid \mathbf{Ax} = \mathbf{b} \text{ e } \mathbf{Tx} \sim \mathbf{h}\}}$$

- Restrições rígidas : $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$.
- Restrições flexíveis: $\mathbf{Tx} \sim \mathbf{h}$.
- A idéia é penalizar os desvios de meta $\mathbf{z} = \mathbf{h} - \mathbf{Tx}$ das restrições flexíveis através de uma função de penalidade

$$\mathbf{z} \mapsto v(\mathbf{z})$$

que é incorporada à função objetivo do problema de otimização original:

$$\min_{\mathbf{x}\in\mathbf{X}} \{\mathbf{cx} + v(\mathbf{h} - \mathbf{Tx}) \mid \mathbf{Ax} = \mathbf{b}\}$$

$$\|$$

$$\min_{\mathbf{x}\in\mathbf{X}} \{\mathbf{cx} + v(\mathbf{z}) \mid \mathbf{Ax} = \mathbf{b} \text{ e } \mathbf{Tx} + \mathbf{z} = \mathbf{h}\}.$$

Como escolher a função de penalidade v?

Notação

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} \boxed{\quad \mathbf{t}_1 \quad} \\ \boxed{\quad \mathbf{t}_2 \quad} \\ \vdots \\ \boxed{\quad \mathbf{t}_m \quad} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{h} = \begin{bmatrix} h_1 \\ h_2 \\ \vdots \\ h_m \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \mathbf{z} = \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ \vdots \\ z_m \end{bmatrix}.$$

$$\mathbf{Tx} \sim \mathbf{h} \quad \Leftrightarrow \quad \mathbf{z} = \mathbf{h} - \mathbf{Tx} \sim \mathbf{0}$$

$$\mathbf{t}_i\mathbf{x} \sim h_i \quad \Leftrightarrow \quad z_i = h_i - \mathbf{t}_i\mathbf{x} \sim 0 \quad \forall i = 1, \ldots, m$$

Como escolher a função de penalidade v?

Notação

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} \boxed{\mathbf{t}_1} \\ \boxed{\mathbf{t}_2} \\ \vdots \\ \boxed{\mathbf{t}_m} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{h} = \begin{bmatrix} h_1 \\ h_2 \\ \vdots \\ h_m \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \mathbf{z} = \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ \vdots \\ z_m \end{bmatrix}.$$

$$\mathbf{Tx} \sim \mathbf{h} \quad \Leftrightarrow \quad \mathbf{z} = \mathbf{h} - \mathbf{Tx} \sim \mathbf{0}$$

$$\mathbf{t}_i\mathbf{x} \sim h_i \quad \Leftrightarrow \quad z_i = h_i - \mathbf{t}_i\mathbf{x} \sim 0 \quad \forall i = 1, \ldots, m$$

$$\mathbf{t}_i\mathbf{x} \leq h_i \quad \Leftrightarrow \quad z_i = h_i - \mathbf{t}_i\mathbf{x} \geq 0$$

Notação

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} \boxed{\quad \mathbf{t}_1 \quad} \\ \boxed{\quad \mathbf{t}_2 \quad} \\ \vdots \\ \boxed{\quad \mathbf{t}_m \quad} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{h} = \begin{bmatrix} h_1 \\ h_2 \\ \vdots \\ h_m \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \mathbf{z} = \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ \vdots \\ z_m \end{bmatrix}.$$

$$\mathbf{Tx} \sim \mathbf{h} \quad \Leftrightarrow \quad \mathbf{z} = \mathbf{h} - \mathbf{Tx} \sim \mathbf{0}$$

$$\mathbf{t}_i\mathbf{x} \sim h_i \quad \Leftrightarrow \quad z_i = h_i - \mathbf{t}_i\mathbf{x} \sim 0 \quad \forall i = 1, \ldots, m$$

$$\mathbf{t}_i\mathbf{x} \geq h_i \quad \Leftrightarrow \quad z_i = h_i - \mathbf{t}_i\mathbf{x} \leq 0$$

Notação

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} \boxed{\quad \mathbf{t}_1 \quad} \\ \boxed{\quad \mathbf{t}_2 \quad} \\ \vdots \\ \boxed{\quad \mathbf{t}_m \quad} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{h} = \begin{bmatrix} h_1 \\ h_2 \\ \vdots \\ h_m \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \mathbf{z} = \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ \vdots \\ z_m \end{bmatrix}.$$

$$\mathbf{Tx} \sim \mathbf{h} \quad \Leftrightarrow \quad \mathbf{z} = \mathbf{h} - \mathbf{Tx} \sim \mathbf{0}$$

$$\mathbf{t}_i\mathbf{x} \sim h_i \quad \Leftrightarrow \quad z_i = h_i - \mathbf{t}_i\mathbf{x} \sim 0 \quad \forall i = 1, \ldots, m$$

$$\mathbf{t}_i\mathbf{x} = h_i \quad \Leftrightarrow \quad z_i = h_i - \mathbf{t}_i\mathbf{x} = 0$$

Função de penalidade com custos individuais

$$v(\mathbf{z}) = \sum_{i=1}^{m} v_i(z_i) = \sum_{i=1}^{m} \underbrace{\left(\overline{q}_i z_i^+ + \underline{q}_i z_i^-\right)}_{v_i(z_i)}.$$

Como escolher $\overline{q}_i$ e $\underline{q}_i$?

Função de penalidade com custos individuais

$$v(\mathbf{z}) = \sum_{i=1}^{m} v_i(z_i) = \sum_{i=1}^{m} \underbrace{\left(\overline{q}_i z_i^+ + \underline{q}_i z_i^-\right)}_{v_i(z_i)}.$$

Como escolher $\overline{q}_i$ e $\underline{q}_i$?

- Restrição do tipo $\mathbf{t}_i\mathbf{x} = h_i$ (isto é, $z_i = 0$):

  Penalizamos superávits escolhendo $\overline{q}_i > 0$ e penalizamos déficits $\underline{q}_i > 0$.

  A função v_i é convexa como soma de funções convexas.

Função de penalidade com custos individuais

$$v(\mathbf{z}) = \sum_{i=1}^{m} v_i(z_i) = \sum_{i=1}^{m} \underbrace{\left(\overline{q}_i z_i^+ + \underline{q}_i z_i^-\right)}_{v_i(z_i)}.$$

Como escolher $\overline{q}_i$ e $\underline{q}_i$?

- Restrição do tipo $\mathbf{t}_i\mathbf{x} \geq h_i$ (isto é, $z_i \leq 0$):

  Penalizamos superávits escolhendo $\overline{q}_i > 0$ e premiamos déficits escolhendo $\underline{q}_i < 0$

  A função v_i é convexa se $\underline{q}_i + \overline{q}_i \geq 0$.

Função de penalidade com custos individuais

$$v(\mathbf{z}) = \sum_{i=1}^{m} v_i(z_i) = \sum_{i=1}^{m} \underbrace{\left(\overline{q}_i z_i^+ + \underline{q}_i z_i^-\right)}_{v_i(z_i)}.$$

Como escolher $\overline{q}_i$ e $\underline{q}_i$?

- Restrição do tipo $\mathbf{t}_i\mathbf{x} \leq h_i$ (isto é, $z_i \geq 0$):

  Premiamos superávits escolhendo $\overline{q}_i < 0$ e penalizamos déficits escolhendo $\underline{q}_i > 0$

  A função v_i é convexa se $\underline{q}_i + \overline{q}_i \geq 0$.

Função de penalidade com custo conjunto

Supondo que todas as restrições são da forma $z_i \geq 0$:

$$v(\mathbf{z}) = v(z_1, z_2, \ldots, z_m) = q_0 \max\{z_1^-, z_2^-, \ldots, z_m^-\}.$$

A função v é convexa se $q_0 \geq 0$.

Função de penalidade via ações de recurso

- Ingredientes necessários para construir a função de penalidade:

  1. Uma estrutura de recurso $(\mathbf{q}, \mathbf{W})$.

     Aqui $\mathbf{q} \in \mathbb{R}^p$ (vetor de custos) e $\mathbf{W}$ é $m \times p$ (matriz de recurso).

  2. Um conjunto $\mathbf{Y}$ de variáveis de recurso.

$$\mathbf{Y} = \{\mathbf{y} \in \mathbb{R}^p \mid \underline{\mathbf{y}} \leq \mathbf{y} \leq \overline{\mathbf{y}}\}$$

ou

$$\mathbf{Y} = \{\mathbf{y} \in \mathbb{R}^p \mid \mathbf{0} \leq \mathbf{y} \leq +\infty\} = \mathbb{R}^p_+.$$

- A função de recurso v é então definida por:

$$v(\mathbf{z}) = \min_{\mathbf{y} \in \mathbf{Y}} \{\mathbf{q}\mathbf{y} \mid \mathbf{W}\mathbf{y} \sim \mathbf{z}\}.$$

Função de penalidade via ações de recurso

Escolhendo-se uma estrutura de recurso adequado, é possível recuperar a função de penalidade com custos individuais e com custo conjunto definidas anteriormente!

Função de penalidade via ações de recurso

$$v_i(z_i) = \overline{q}_i z_i^+ + \underline{q}_i z_i^- .$$

Função de penalidade via ações de recurso

$$v_i(z_i) = \overline{q}_i z_i^+ + \underline{q}_i z_i^- .$$

$$\mathbf{q} = \left(\begin{array}{cc} \overline{q}_i, & \underline{q}_i \end{array} \right) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} = \mathbb{R}^2, \quad \mathbf{W} = \left[\begin{array}{cc} +1 & -1 \end{array} \right]_{1 \times 2},$$

$$\mathbf{Y} = \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+ = \mathbb{R}^2_+.$$

Função de penalidade via ações de recurso

$$v_i(z_i) = \overline{q}_i z_i^+ + \underline{q}_i z_i^- .$$

$$\mathbf{q} = \left(\; \overline{q}_i, \quad \underline{q}_i \; \right) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} = \mathbb{R}^2, \quad \mathbf{W} = \left[\; +1 \quad -1 \; \right]_{1\times 2},$$

$$\mathbf{Y} = \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+ = \mathbb{R}^2_+.$$

$$v_i(z_i) \quad = \quad \min_{\mathbf{y} \in \mathbf{Y}} \{\mathbf{qy} \mid \mathbf{Wy} = z_i\}$$

Função de penalidade via ações de recurso

$$v_i(z_i) = \overline{q}_i z_i^+ + \underline{q}_i z_i^- .$$

$$\mathbf{q} = \begin{pmatrix} \overline{q}_i, & \underline{q}_i \end{pmatrix} \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} = \mathbb{R}^2, \quad \mathbf{W} = \begin{bmatrix} +1 & -1 \end{bmatrix}_{1\times 2},$$

$$\mathbf{Y} = \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+ = \mathbb{R}_+^2.$$

$$\begin{aligned} v_i(z_i) &= \min_{\mathbf{y}\in\mathbf{Y}} \{\mathbf{qy} \mid \mathbf{Wy} = z_i\} \\ &= \min_{\overline{y}\geq 0, \underline{y}\geq 0} \left\{ \begin{bmatrix} \overline{q} & \underline{q} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \overline{y} \\ \underline{y} \end{bmatrix} \middle| \begin{bmatrix} +1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \overline{y} \\ \underline{y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} z_i \end{bmatrix} \right\} \end{aligned}$$

Função de penalidade via ações de recurso

$$v_i(z_i) = \overline{q}_i z_i^+ + \underline{q}_i z_i^- .$$

$$\mathbf{q} = \left(\ \overline{q}_i, \quad \underline{q}_i \ \right) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} = \mathbb{R}^2, \quad \mathbf{W} = \left[\ +1 \quad -1 \ \right]_{1 \times 2},$$

$$\mathbf{Y} = \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+ = \mathbb{R}^2_+.$$

$$\begin{aligned}
v_i(z_i) &= \min_{\mathbf{y} \in \mathbf{Y}} \{\mathbf{qy} \mid \mathbf{Wy} = z_i\} \\
&= \min_{\overline{y} \geq 0, \underline{y} \geq 0} \left\{ \left[\ \overline{q} \quad \underline{q} \ \right] \begin{bmatrix} \overline{y} \\ \underline{y} \end{bmatrix} \,\middle|\, \left[\ +1 \quad -1 \ \right] \begin{bmatrix} \overline{y} \\ \underline{y} \end{bmatrix} = \left[\ z_i \ \right] \right\} \\
&= \min_{\overline{y} \geq 0, \underline{y} \geq 0} \left\{ \overline{qy} + \underline{qy} \mid \overline{y} - \underline{y} = z_i \right\}
\end{aligned}$$

Função de penalidade via ações de recurso

$$v_i(z_i) = \overline{q}_i z_i^+ + \underline{q}_i z_i^- .$$

$$\mathbf{q} = \begin{pmatrix} \overline{q}_i, & \underline{q}_i \end{pmatrix} \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} = \mathbb{R}^2, \quad \mathbf{W} = \begin{bmatrix} +1 & -1 \end{bmatrix}_{1\times 2},$$

$$\mathbf{Y} = \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+ = \mathbb{R}^2_+.$$

$$\begin{aligned} v_i(z_i) &= \min_{\mathbf{y}\in\mathbf{Y}} \{\mathbf{qy} \mid \mathbf{Wy} = z_i\} \\ &= \min_{\overline{y}\geq 0, \underline{y}\geq 0} \left\{ \begin{bmatrix} \overline{q} & \underline{q} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \overline{y} \\ \underline{y} \end{bmatrix} \middle| \begin{bmatrix} +1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \overline{y} \\ \underline{y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} z_i \end{bmatrix} \right\} \\ &= \min_{\overline{y}\geq 0, \underline{y}\geq 0} \{\overline{qy} + \underline{qy} \mid \overline{y} - \underline{y} = z_i\} \\ &= \overline{q}_i z_i^+ + \underline{q}_i z_i^- . \end{aligned}$$

Função de penalidade via ações de recurso

$$v(\mathbf{z}) = v(z_1, z_2, \ldots, z_m) = q_0 \max\{z_1^-, z_2^-, \ldots, z_m^-\}.$$

Função de penalidade via ações de recurso

$$v(\mathbf{z}) = v(z_1, z_2, \ldots, z_m) = q_0 \max\{z_1^-, z_2^-, \ldots, z_m^-\}.$$

$$\mathbf{q} = \left(\; q_0 \;\right) \in \mathbb{R}, \quad \mathbf{W} = \begin{bmatrix} -1 \\ \vdots \\ -1 \end{bmatrix}_{m \times 1}, \quad \mathbf{Y} = \mathbb{R}_+.$$

Função de penalidade via ações de recurso

$$v(\mathbf{z}) = v(z_1, z_2, \ldots, z_m) = q_0 \max\{z_1^-, z_2^-, \ldots, z_m^-\}.$$

$$\mathbf{q} = \begin{pmatrix} q_0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}, \quad \mathbf{W} = \begin{bmatrix} -1 \\ \vdots \\ -1 \end{bmatrix}_{m\times 1}, \quad \mathbf{Y} = \mathbb{R}_+.$$

$$v(\mathbf{z}) \quad = \quad \min_{\mathbf{y}\in\mathbf{Y}} \{\mathbf{q}\mathbf{y} \mid \mathbf{W}\mathbf{y} \leq \mathbf{z}\}$$

Função de penalidade via ações de recurso

$$v(\mathbf{z}) = v(z_1, z_2, \ldots, z_m) = q_0 \max\{z_1^-, z_2^-, \ldots, z_m^-\}.$$

$$\mathbf{q} = \left(\; q_0 \; \right) \in \mathbb{R}, \quad \mathbf{W} = \begin{bmatrix} -1 \\ \vdots \\ -1 \end{bmatrix}_{m \times 1}, \quad \mathbf{Y} = \mathbb{R}_+.$$

$$\begin{aligned} v(\mathbf{z}) &= \min_{\mathbf{y} \in \mathbf{Y}} \{\mathbf{qy} \mid \mathbf{Wy} \le \mathbf{z}\} \\ &= \min_{y \ge 0} \left\{ \left[\; q_0 \; \right] \left[\; y \; \right] \; \middle| \; \begin{bmatrix} -1 \\ \vdots \\ -1 \end{bmatrix} \left[\; y \; \right] \le \begin{bmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_m \end{bmatrix} \right\} \end{aligned}$$

$$v(\mathbf{z}) = v(z_1, z_2, \ldots, z_m) = q_0 \max\{z_1^-, z_2^-, \ldots, z_m^-\}.$$

$$\mathbf{q} = \left(\; q_0 \; \right) \in \mathbb{R}, \quad \mathbf{W} = \begin{bmatrix} -1 \\ \vdots \\ -1 \end{bmatrix}_{m \times 1}, \quad \mathbf{Y} = \mathbb{R}_+.$$

$$\begin{aligned} v(\mathbf{z}) &= \min_{\mathbf{y} \in \mathbf{Y}} \{\mathbf{q}\mathbf{y} \mid \mathbf{W}\mathbf{y} \leq \mathbf{z}\} \\ &= \min_{y \geq 0} \left\{ \begin{bmatrix} q_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y \end{bmatrix} \;\middle|\; \begin{bmatrix} -1 \\ \vdots \\ -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y \end{bmatrix} \leq \begin{bmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_m \end{bmatrix} \right\} \\ &= \min_{y \geq 0} \{qy \mid y \geq -z_1, \ldots, y \geq -z_m\} \end{aligned}$$

Função de penalidade via ações de recurso

$$v(\mathbf{z}) = v(z_1, z_2, \ldots, z_m) = q_0 \max\{z_1^-, z_2^-, \ldots, z_m^-\}.$$

$$\mathbf{q} = \left(\; q_0 \; \right) \in \mathbb{R}, \quad \mathbf{W} = \begin{bmatrix} -1 \\ \vdots \\ -1 \end{bmatrix}_{m \times 1}, \quad \mathbf{Y} = \mathbb{R}_+.$$

$$\begin{aligned} v(\mathbf{z}) &= \min_{\mathbf{y} \in \mathbf{Y}} \{\mathbf{q}\mathbf{y} \mid \mathbf{W}\mathbf{y} \leq \mathbf{z}\} \\ &= \min_{y \geq 0} \left\{ \begin{bmatrix} q_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y \end{bmatrix} \;\middle|\; \begin{bmatrix} -1 \\ \vdots \\ -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y \end{bmatrix} \leq \begin{bmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_m \end{bmatrix} \right\} \\ &= \min_{y \geq 0} \{q y \mid y \geq -z_1, \ldots, y \geq -z_m\} \\ &= q_0 \max\{z_1^-, z_2^-, \ldots, z_m^-\}, \end{aligned}$$

Modelos de recurso em otimização estocástica

$$\min_{\mathbf{x} \in \mathbf{X}} \{\mathbf{cx} \mid \mathbf{Ax} = \mathbf{b} \text{ e } \mathbf{T}(\omega)\mathbf{x} \sim \mathbf{h}(\omega)\}$$

$$\min_{\mathbf{x}\in\mathbf{X}} \{\mathbf{cx} \mid \mathbf{Ax} = \mathbf{b} \text{ e } \mathbf{T}(\omega)\mathbf{x} \sim \mathbf{h}(\omega)\}$$

ESTÁGIO 1				ESTÁGIO 2
decisão em **x**	$\longrightarrow$	ocorre ω	$\longrightarrow$	ação corretiva **y**

Modelos de recurso em otimização estocástica

$$\min_{\mathbf{x}\in\mathbf{X}} \{\mathbf{cx} \mid \mathbf{Ax} = \mathbf{b} \text{ e } \mathbf{T}(\omega)\mathbf{x} \sim \mathbf{h}(\omega)\}$$

ESTÁGIO 1				ESTÁGIO 2
decisão em $\mathbf{x}$	$\longrightarrow$	ocorre ω	$\longrightarrow$	ação corretiva $\mathbf{y}$

$$\min_{\mathbf{x}\in\mathbf{X}} \{\mathbf{cx} + \mathbb{E}\left[v(\mathbf{z},\omega)\right] \mid \mathbf{Ax} = \mathbf{b}\}$$

onde

$$v(\mathbf{z},\omega) = \min_{\mathbf{y}\in\mathbf{Y}} \{\mathbf{q}(\omega)\mathbf{y} \mid \mathbf{W}(\omega)\mathbf{y} \sim \mathbf{h}(\omega) - \mathbf{T}(\omega)\mathbf{x}\}\,.$$

$$\min_{\mathbf{x}\in\mathbf{X}} \{\mathbf{cx} + \mathcal{Q}(\mathbf{x}) \mid \mathbf{Ax} = \mathbf{b}\}$$

onde

$$\mathcal{Q}(\mathbf{x}) = \mathbb{E}\left[v(\mathbf{z},\omega)\right] = \underbrace{\mathbb{E}\left[\min_{\mathbf{y}\in\mathbf{Y}} \{\mathbf{q}(\omega)\mathbf{y} \mid \mathbf{W}(\omega)\mathbf{y} \sim \mathbf{h}(\omega) - \mathbf{T}(\omega)\mathbf{x}\}\right]}_{\text{LP de segundo estágio}}.$$

$$\min_{\mathbf{x} \in \mathbf{X}} \{\mathbf{cx} + \mathcal{Q}(\mathbf{x}) \mid \mathbf{Ax} = \mathbf{b}\}$$

onde

$$\mathcal{Q}(\mathbf{x}) = \mathbb{E}\left[v(\mathbf{z}, \omega)\right] = \mathbb{E}\underbrace{\left[\min_{\mathbf{y} \in \mathbf{Y}} \{\mathbf{q}(\omega)\mathbf{y} \mid \mathbf{W}(\omega)\mathbf{y} \sim \mathbf{h}(\omega) - \mathbf{T}(\omega)\mathbf{x}\}\right]}_{\text{LP de segundo estágio}}.$$

Perguntas:

- O problema de segundo estágio sempre está bem definido?
- A esperança (uma integral!) sempre é finita?
- $\mathcal{Q}$ é uma função simpática?

Perguntas:

- O problema de segundo estágio sempre está bem definido?

- A esperança (uma integral!) sempre é finita?

- $\mathcal{Q}$ é uma função simpática?

Perguntas:

- O problema de segundo estágio sempre está bem definido?
  Resposta: Sim, se $\mathbf{W}$ é de recurso completo ou de recurso simples, isto é, se

$$\forall \mathbf{z} \in \mathbb{R}^m, \exists \mathbf{y} \geq \mathbf{0} \mid \mathbf{W}\mathbf{y} = \mathbf{z} \qquad \text{(recurso completo)}$$

  ou

$$\mathbf{W} = \begin{bmatrix} +I & -I \end{bmatrix}. \qquad \text{(recurso simples)}$$

- A esperança (uma integral!) sempre é finita?

- $\mathcal{Q}$ é uma função simpática?

Perguntas:

- O problema de segundo estágio sempre está bem definido?
Resposta: Sim, se $\mathbf{W}$ é de recurso completo ou de recurso simples, isto é, se

$$\forall \mathbf{z} \in \mathbb{R}^m, \exists \mathbf{y} \geq \mathbf{0} \mid \mathbf{W}\mathbf{y} = \mathbf{z} \qquad \text{(recurso completo)}$$

ou

$$\mathbf{W} = \begin{bmatrix} +I & -I \end{bmatrix}. \qquad \text{(recurso simples)}$$

- A esperança (uma integral!) sempre é finita?
Resposta: Sim, se ω tem segundos momentos finitos.

- $\mathcal{Q}$ é uma função simpática?

Perguntas:

- O problema de segundo estágio sempre está bem definido?
  Resposta: Sim, se $\mathbf{W}$ é de recurso completo ou de recurso simples, isto é, se

$$\forall \mathbf{z} \in \mathbb{R}^m, \exists \mathbf{y} \geq \mathbf{0} \mid \mathbf{W}\mathbf{y} = \mathbf{z} \qquad \text{(recurso completo)}$$

  ou

$$\mathbf{W} = \begin{bmatrix} +I & -I \end{bmatrix}. \qquad \text{(recurso simples)}$$

- A esperança (uma integral!) sempre é finita?
  Resposta: Sim, se ω tem segundos momentos finitos.

- $\mathcal{Q}$ é uma função simpática?
  Resposta: Sim! $\mathcal{Q}$ é convexa e diferenciável de ω tem distribuição contínua.

A forma extensa

$$\min_{\mathbf{x}\in\mathbf{X}} \left\{ \mathbf{c}\mathbf{x} + \mathbb{E}\left[\min_{\mathbf{y}\in\mathbf{Y}} \{ \mathbf{q}(\omega)\mathbf{y} \mid \mathbf{W}(\omega)\mathbf{y} = \mathbf{h}(\omega) - \mathbf{T}(\omega)\mathbf{x} \} \right] \,\middle|\, \mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b} \right\}$$

A forma extensa

$$\min_{\mathbf{x}\in\mathbf{X}} \left\{ \mathbf{cx} + \mathbb{E}\left[\min_{\mathbf{y}\in\mathbf{Y}} \{ \mathbf{q}(\omega)\mathbf{y} \mid \mathbf{W}(\omega)\mathbf{y} = \mathbf{h}(\omega) - \mathbf{T}(\omega)\mathbf{x} \} \right] \;\middle|\; \mathbf{Ax} = \mathbf{b} \right\}$$

$$\begin{array}{lllllll}
\underset{\substack{\mathbf{x}\in\mathbf{X} \\ \mathbf{y}^1,\mathbf{y}^2,\ldots,\mathbf{y}^S\in\mathbf{Y}}}{\text{minimizar}} & \multicolumn{6}{l}{\mathbf{cx} + p_1\mathbf{q}^1\mathbf{y}^1 + p_2\mathbf{q}^2\mathbf{y}^2 + \cdots + p_S\mathbf{q}^S\mathbf{y}^S} \\
\text{sujeito a} & \mathbf{Ax} & & & & = & \mathbf{b}, \\
& \mathbf{T}^1\mathbf{x} & + \; \mathbf{Wy}^1 & & & \sim & \mathbf{h}^1, \\
& \mathbf{T}^1\mathbf{x} & & + \; \mathbf{Wy}^2 & & \sim & \mathbf{h}^2, \\
& \vdots & & & \ddots & \vdots & \vdots \\
& \mathbf{T}^S\mathbf{x} & & & + \; \mathbf{Wy}^S & \sim & \mathbf{h}^S,
\end{array}$$

$$p_s = \mathbb{P}\left(\omega = \omega^S\right),\ \mathbf{q}^s = \mathbf{q}(\omega^s),\ \mathbf{y}^s = \mathbf{y}(\omega^s),\ \mathbf{T}^s = \mathbf{T}(\omega^s),\ \mathbf{h}^s = \mathbf{h}(\omega^s),$$

$$\mathbf{W}(\omega) = \mathbf{W} \text{ (recurso fixo).}$$