Uma Introdução à Otimização sob Incerteza
Aula 2

Bernardo Kulnig Pagnoncelli[1] e Humberto José Bortolossi[2]

[1]Departamento de Matemática
Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro

[2]Departamento de Matemática Aplicada
Universidade Federal Fluminense

III Bienal da SBM
Universidade Federal de Goiás

6 a 10 de novembro de 2006

Programação Linear com Coeficientes Aleatórios

Programação Linear com Coeficientes Aleatórios

Dois modelos clássicos para otimização estocástica:

- ESPERE E VEJA (WAIT AND SEE)

  O agente de decisão pode esperar pela realização dos coeficientes aleatórios.

- AQUI E AGORA (HERE AND NOW)

  O agente de decisão faz suas escolhas antes ou sem conhecimento das realizações dos coeficientes aleatórios.

  Dificuldade adicional: definições habituais de admissibilidade e otimalidade não se aplicam. Especificações adicionais são necessárias.

O problema da mistura

- Pedro (irmão de João) também é fazendeiro. Ele consultou um agrônomo que recomendou para cada 100 m^2 de terra:

  7 g do nutriente A e 4 g do nutriente B.

- Pedro dispõe de dois tipos de adubo para suprir estes nutrientes.
  1. Cada kg do adubo 1 possui ω_1 g de A e ω_2 g de B.
  2. Cada kg do adubo 2 possui 1 g de A e 1 g de B.

- Cada kg de cada tipo de adubo custa uma unidade monetária.

O problema da mistura

Problema de otimização: o quanto comprar de cada adubo para atender a necessidade de nutrientes (em 100 m^2) minimizando o custo de compra?

O problema da mistura

Problema de otimização: o quanto comprar de cada adubo para atender a necessidade de nutrientes (em 100 m^2) minimizando o custo de compra?

x_1: quantidade (em kg) do adubo 1 que foi comprada.
x_2: quantidade (em kg) do adubo 2 que foi comprada.

$$\boxed{\begin{array}{rr} \text{minimizar} & f(x_1, x_2) = x_1 + x_2 \\ \text{sujeito a} & \omega_1\, x_1 + x_2 \geq 7, \\ & \omega_2\, x_1 + x_2 \geq 4, \\ & x_1 \geq 0, \\ & x_2 \geq 0. \end{array}}$$

O problema da mistura

$$\boxed{\begin{array}{rr} \text{minimizar} & f(x_1, x_2) = x_1 + x_2 \\ \text{sujeito a} & \omega_1 \;\; x_1 + x_2 \geq 7, \\ & \omega_2 \;\; x_1 + x_2 \geq 4, \\ & x_1 \geq 0, \\ & x_2 \geq 0. \end{array}}$$

Mas . . .

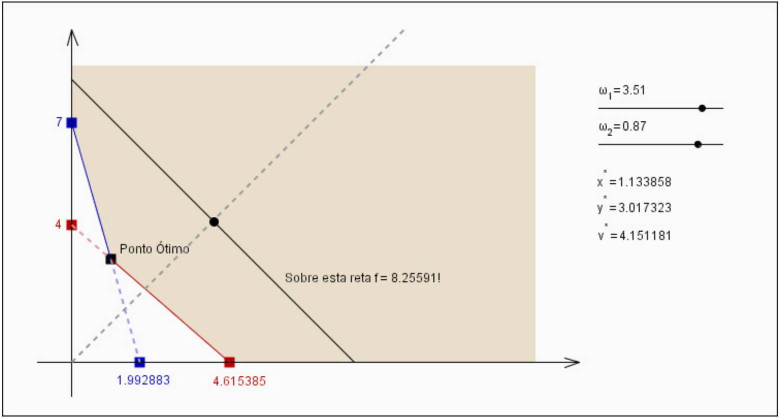
- ω_1 e ω_2 são coeficientes incertos!

O problema da mistura

$$\begin{array}{rr} \text{minimizar} & f(x_1, x_2) = x_1 + x_2 \\ \text{sujeito a} & \omega_1 \;\; x_1 + x_2 \geq 7, \\ & \omega_2 \;\; x_1 + x_2 \geq 4, \\ & x_1 \geq 0, \\ & x_2 \geq 0. \end{array}$$

Mas ...

- ω_1 e ω_2 são coeficientes incertos!
- ω_1 é uniformemente distribuída no intervalo $[1, 4]$.
- ω_2 é uniformemente distribuída no intervalo $[1/3, 1]$.
- ω_1 e ω_2 são independentes!



7
4
Ponto Ótimo
Sobre esta reta f = 8.25591!
1.992883
4.615385
ω1 = 3.51
ω2 = 0.87
x* = 1.133858
y* = 3.017323
v* = 4.151181

Abordagem “Espere e Veja”

- O agente de decisão pode fazer a escolha dos valores de $\mathbf{x} = (x_1, x_2)$ depois da realização de $\boldsymbol{\omega} = (\omega_1, \omega_2)$.

- O problema da mistura, neste contexto, é um PL paramétrico.

- O agente de decisão pode fazer a escolha dos valores de $\mathbf{x} = (x_1, x_2)$ depois da realização de $\boldsymbol{\omega} = (\omega_1, \omega_2)$.

- O problema da mistura, neste contexto, é um PL paramétrico.

- A solução ótima e o valor ótimo são calculados em função de $\boldsymbol{\omega} = (\omega_1, \omega_2)$:

$$(x_1^*(\omega_1, \omega_2), x_2^*(\omega_1, \omega_2))$$
$$\shortparallel$$
$$\begin{cases} \left(\dfrac{3}{\omega_1 - \omega_2}, \dfrac{4\,\omega_1 - 7\,\omega_2}{\omega_1 - \omega_2}\right), & \text{se } \dfrac{7}{\omega_1} \leq \dfrac{4}{\omega_2}, \\ \left(\dfrac{7}{\omega_1}, 0\right), & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Abordagem “Espere e Veja”

- O agente de decisão pode fazer a escolha dos valores de $\mathbf{x} = (x_1, x_2)$ depois da realização de $\boldsymbol{\omega} = (\omega_1, \omega_2)$.

- O problema da mistura, neste contexto, é um PL paramétrico.

- A solução ótima e o valor ótimo são calculados em função de $\boldsymbol{\omega} = (\omega_1, \omega_2)$:

$$v^*(x_1^*(\omega_1, \omega_2), x_2^*(\omega_1, \omega_2))$$

$$\|$$

$$\begin{cases} \dfrac{3 + 4\,\omega_1 - 7\,\omega_2}{\omega_1 - \omega_2}, & \text{se } \dfrac{7}{\omega_1} \leq \dfrac{4}{\omega_2}, \\[2ex] \dfrac{7}{\omega_1}, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Abordagem "Espere e Veja"

- Tendo em mãos o valor ótimo

$$
\begin{array}{c}
v^*(x_1^*(\omega_1, \omega_2), x_2^*(\omega_1, \omega_2)) \\
\shortparallel \\
\begin{cases}
\dfrac{3 + 4\,\omega_1 - 7\,\omega_2}{\omega_1 - \omega_2}, & \text{se } \dfrac{7}{\omega_1} \leq \dfrac{4}{\omega_2}, \\[2ex]
\dfrac{7}{\omega_1}, & \text{caso contrário,}
\end{cases}
\end{array}
$$

podemos então calcular a média, a variância, etc.

$$
\text{média} = \mathbb{E}\,[v^*(x_1^*(\omega_1, \omega_2), x_2^*(\omega_1, \omega_2))] \quad = \quad 4.7526655\ldots.
$$

- O agente de decisão deve fazer a escolha de $\mathbf{x} = (x_1, x_2)$ sem conhecer os valores de $\boldsymbol{\omega} = (\omega_1, \omega_2)$.
- Sem se conhecer os coeficientes, as definições habituais de admissibilidade e otimalidade não se aplicam!

$$\boxed{\begin{array}{rr} \text{minimizar} & f(x_1, x_2) = x_1 + x_2 \\ \text{sujeito a} & \omega_1 \;\; x_1 + x_2 \geq 7, \\ & \omega_2 \;\; x_1 + x_2 \geq 4, \\ & x_1 \geq 0, \\ & x_2 \geq 0. \end{array}}$$

- Especificações adicionais de modelagem são necessárias.

Abordagem “Aqui e Agora”

- O agente de decisão deve fazer a escolha de $\mathbf{x} = (x_1, x_2)$ sem conhecer os valores de $\boldsymbol{\omega} = (\omega_1, \omega_2)$.
- Sem se conhecer os coeficientes, as definições habituais de admissibilidade e otimalidade não se aplicam!

$$\boxed{\begin{array}{rr} \text{minimizar} & f(x_1, x_2) = x_1 + x_2 \\ \text{sujeito a} & \omega_1 \;\; x_1 + x_2 \geq 7, \\ & \omega_2 \;\; x_1 + x_2 \geq 4, \\ & x_1 \geq 0, \\ & x_2 \geq 0. \end{array}}$$

- Especificações adicionais de modelagem são necessárias. Veremos 3 delas:

1. Abolir incertezas.

Abordagem “Aqui e Agora”

- O agente de decisão pode fazer a escolha de $\mathbf{x} = (x_1, x_2)$ sem conhecer os valores de $\boldsymbol{\omega} = (\omega_1, \omega_2)$.
- Sem se conhecer os coeficientes, as definições habituais de admissibilidade e otimalidade não se aplicam!

$$\boxed{\begin{array}{rr} \text{minimizar} & f(x_1, x_2) = x_1 + x_2 \\ \text{sujeito a} & \omega_1 \;\; x_1 + x_2 \geq 7, \\ & \omega_2 \;\; x_1 + x_2 \geq 4, \\ & x_1 \geq 0, \\ & x_2 \geq 0. \end{array}}$$

- Especificações adicionais de modelagem são necessárias. Veremos 3 delas:

   2. Incorporar riscos nas restrições (chance constraints).

Abordagem “Aqui e Agora”

- O agente de decisão pode fazer a escolha de $\mathbf{x} = (x_1, x_2)$ sem conhecer os valores de $\boldsymbol{\omega} = (\omega_1, \omega_2)$.
- Sem se conhecer os coeficientes, as definições habituais de admissibilidade e otimalidade não se aplicam!

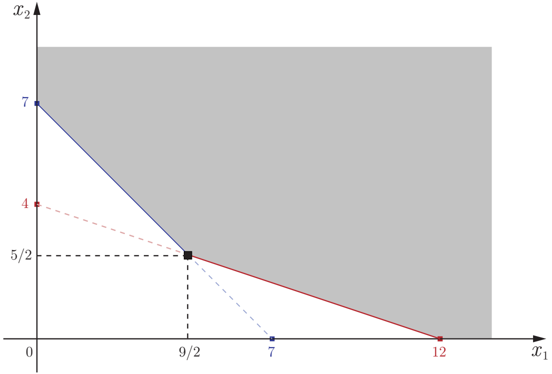
$$\begin{array}{ll} \text{minimizar} & f(x_1, x_2) = x_1 + x_2 \\ \text{sujeito a} & \omega_1 \; x_1 + x_2 \geq 7, \\ & \omega_2 \; x_1 + x_2 \geq 4, \\ & x_1 \geq 0, \\ & x_2 \geq 0. \end{array}$$

- Especificações adicionais de modelagem são necessárias. Veremos 3 delas:

  3. Aceitar inadmissibilidade, penalizando déficits esperados.

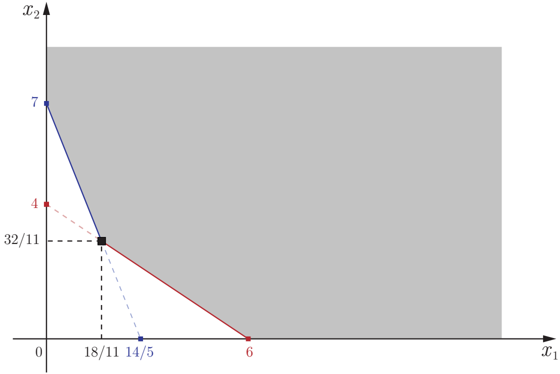
O agente de decisão simplesmente faz uma escolha apropriada para ω e, então, ele resolve o problema determinístico correspondente.

Escolha “pessimista”: $\widehat{\omega} = (1, 1/3)$.



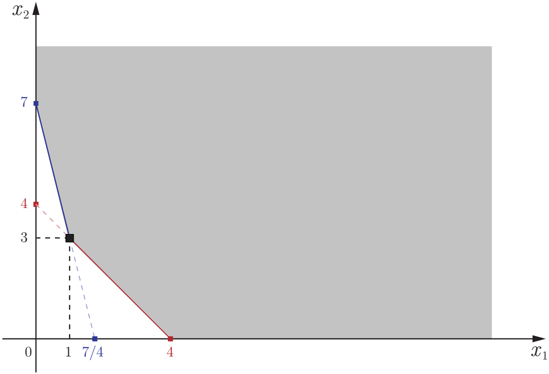
Ponto ótimo: $\widehat{\mathbf{x}} = (9/2, 5/2)$. Valor ótimo: $\widehat{v} = 7$.

Escolha “neutra”: $\widehat{\omega} = (5/2, 2/3) = \mathbb{E}[(\omega_1, \omega_2)]$.



Ponto ótimo: $\widehat{\mathbf{x}} = (18/11, 32/11)$. Valor ótimo: $\widehat{v} = 50/11 = 4.\overline{54}$.

Escolha “otimista”: $\widehat{\omega} = (4, 1)$.



Ponto ótimo: $\widehat{\mathbf{x}} = (1, 3)$. Valor ótimo: $\widehat{v} = 4$.

2. Incorporar riscos nas restrições

- O agente de decisão descreve uma “medida de risco”, faz uma escolha do “nível máximo de risco aceitável” e, então, ele incorpora estes elementos nas restrições do programa linear.

- O agente de decisão pode escolher entre níveis de confiabilidade individuais ou um nível de confiabilidade conjunto.

Níveis de confiabilidade individuais

O agente de decisão escolhe dois níveis de confiabilidade individuais:

$$\alpha_1 \in [0, 1], \qquad \alpha_2 \in [0, 1],$$

e ele decreta que

$$\boxed{\begin{array}{c} \mathbf{x} = (x_1, x_2) \in [0, +\infty) \times [0, +\infty) \text{ é admissível} \\ \Updownarrow \\ \left\{ \begin{array}{lcl} \mathbb{P}(\omega_1 x_1 + x_2 \geq 7) & \geq & \alpha_1 \\ \mathbb{P}(\omega_2 x_1 + x_2 \geq 4) & \geq & \alpha_2 \end{array} \right. . \end{array}}$$

Níveis de confiabilidade individuais

Problema Original

$$\begin{array}{ll} \text{minimizar} & f(x_1, x_2) = x_1 + x_2 \\ \text{sujeito a} & \omega_1 \;\; x_1 + x_2 \geq 7, \\ & \omega_2 \;\; x_1 + x_2 \geq 4, \\ & x_1 \geq 0, \\ & x_2 \geq 0. \end{array}$$

Problema via Chance Constraints

$$\begin{array}{ll} \text{minimizar} & f(x_1, x_2) = x_1 + x_2 \\ \text{sujeito a} & \mathbb{P}\left(\omega_1 \, x_1 + x_2 \geq 7\right) \geq \alpha_1, \\ & \mathbb{P}\left(\omega_2 \, x_1 + x_2 \geq 4\right) \geq \alpha_2, \\ & x_1 \geq 0, \\ & x_2 \geq 0. \end{array}$$

Níveis de confiabilidade individuais

Se $0 \leq \alpha_1 < 1$ e $0 \leq \alpha_2 < 1$, então

$$\left\{ \begin{array}{lcl} \mathbb{P}\left(\omega_1\, x_1 + x_2 \geq 7\right) & \geq & \alpha_1 \\ \mathbb{P}\left(\omega_2\, x_1 + x_2 \geq 4\right) & \geq & \alpha_2 \end{array} \right. \iff \left\{ \begin{array}{lcl} F_1^{-1}(1 - \alpha_1)\, x_1 + x_2 & \geq & 7 \\ F_2^{-1}(1 - \alpha_2)\, x_1 + x_2 & \geq & 4 \end{array} \right.$$

onde

$$F_i^{-1}(\alpha) := \min_{t \in [-\infty, +\infty)} \{t \mid F_i(t) \geq \alpha\}$$

é o α-ésimo quantil de ω_i.

Níveis de confiabilidade individuais

Problema Original

$$
\begin{array}{ll}
\text{minimizar} & f(x_1, x_2) = x_1 + x_2 \\
\text{sujeito a} & \omega_1 \ x_1 + x_2 \geq 7, \\
& \omega_2 \ x_1 + x_2 \geq 4, \\
& x_1 \geq 0, \\
& x_2 \geq 0.
\end{array}
$$

Problema via Chance Constraints

$$
\begin{array}{ll}
\text{minimizar} & f(x_1, x_2) = x_1 + x_2 \\
\text{sujeito a} & F_1^{-1}(1 - \alpha_1)\, x_1 + x_2 \geq 7, \\
& F_2^{-1}(1 - \alpha_2)\, x_1 + x_2 \geq 4, \\
& x_1 \geq 0, \\
& x_2 \geq 0.
\end{array}
$$

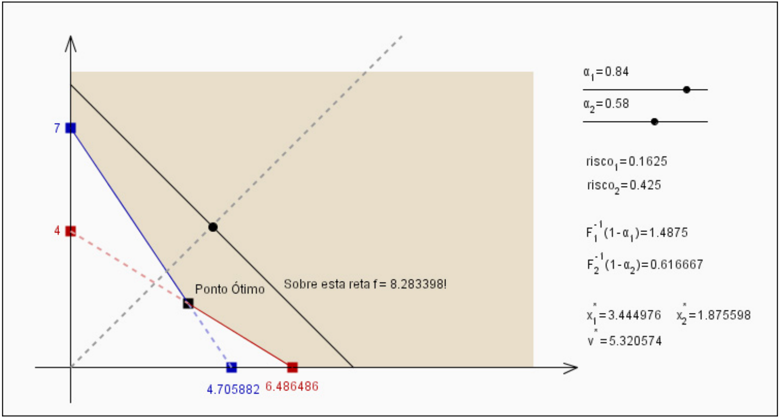
Níveis de confiabilidade individuais

$$\alpha_1 = \alpha_2 = 2/3$$

$$F_1^{-1}(1-\alpha_1) = F_1^{-1}(1/3) = 2 \quad \text{e} \quad F_2^{-1}(1-\alpha_2) = F_2^{-1}(1/3) = 5/9.$$

$$\boxed{\begin{array}{rl} \text{minimizar} & f(x_1, x_2) = x_1 + x_2 \\ \text{sujeito a} & 2\,x_1 \quad\; + x_2 \geq 7, \\ & 5\,x_1/9 + x_2 \geq 4, \\ & x_1 \geq 0, \\ & x_2 \geq 0, \end{array}}$$

$$\mathbf{x}^* = (x_1^*, x_2^*) = (27/13, 37/13) = (2.\overline{076923}, 2.\overline{846153}),$$
$$v^* = 64/13 = 4.\overline{923076}.$$



7
4
Ponto Ótimo
Sobre esta reta f = 8.283398!
4.705882
6.486486
α1=0.84
α2=0.58
risco1=0.1625
risco2=0.425
F1-1(1-α1)=1.4875
F2-1(1-α2)=0.616667
x1*=3.444976
x2*=1.875598
v*=5.320574

Nível de confiabilidade conjunto

O agente de decisão escolhe um nível de confiabilidade conjunto:

$$\alpha \in [0, 1],$$

e ele decreta que

$$\boxed{\begin{array}{c} \mathbf{x} = (x_1, x_2) \in [0, +\infty) \times [0, +\infty) \text{ é admissível} \\ \Updownarrow \\ \mathbb{P}\,(\omega_1\, x_1 + x_2 \geq 7 \;\; \text{e} \;\; \omega_2\, x_1 + x_2 \geq 4) \geq \alpha. \end{array}}$$

Nível de confiabilidade conjunto

Problema Original

$$
\begin{array}{lr}
\text{minimizar} & f(x_1, x_2) = x_1 + x_2 \\
\text{sujeito a} & \omega_1 \; x_1 + x_2 \geq 7, \\
& \omega_2 \; x_1 + x_2 \geq 4, \\
& x_1 \geq 0, \\
& x_2 \geq 0.
\end{array}
$$

Problema via Chance Constraints

$$
\begin{array}{lr}
\text{minimizar} & f(x_1, x_2) = x_1 + x_2 \\
\text{sujeito a} & \mathbb{P}\left(\omega_1 \, x_1 + x_2 \geq 7 \;\; \text{e} \;\; \omega_2 \, x_1 + x_2 \geq 4\right) \geq \alpha, \\
& x_1 \geq 0, \\
& x_2 \geq 0.
\end{array}
$$

Nível de confiabilidade conjunto

$$\mathbb{P}\left(\omega_1\, x_1 + x_2 \geq 7 \;\; \text{e} \;\; \omega_2\, x_1 + x_2 \geq 4\right)$$

$$||$$

$$\mathbb{P}\left(\omega_1\, x_1 + x_2 \geq 7\right) \cdot \mathbb{P}\left(\omega_2\, x_1 + x_2 \geq 4\right)$$

$$||$$

$$\begin{cases} \left(1 - F_1\left(\dfrac{7 - x_2}{x_1}\right)\right) \cdot \left(1 - F_2\left(\dfrac{4 - x_2}{x_1}\right)\right), & \text{se } x_1 > 0, \\ 1, & \text{se } x_1 = 0 \text{ e } x_2 \geq 7, \\ 0, & \text{se } x_1 = 0 \text{ e } 0 \leq x_2 < 7. \end{cases}$$

Nível de confiabilidade conjunto

$$\alpha = 2/3$$

$$\mathbb{P}\,(\omega_1\,x_1 + x_2 \geq 7 \;\; \text{e} \;\; \omega_2\,x_1 + x_2 \geq 4) \geq \frac{2}{3}$$

$$\Updownarrow$$

$$x_2 \geq \max\left\{ -2\,x_1 + 7, \frac{11 - 5\,x_1 + \sqrt{9 - 18\,x_1 + \frac{43}{3}\,x_1^2}}{2}, -\frac{5\,x_1}{9} + 4 \right\}$$

Nível de confiabilidade conjunto

$$\alpha = 2/3$$

minimizar

$$f(x_1, x_2) = x_1 + x_2$$

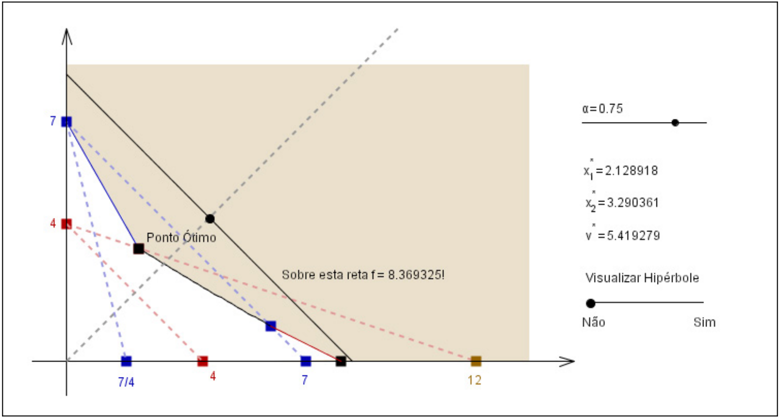
sujeito a

$$x_2 \geq \max \left\{ -2\,x_1 + 7, \frac{11 - 5\,x_1 + \sqrt{9 - 18\,x_1 + \frac{43}{3}\,x_1^2}}{2}, -\frac{5\,x_1}{9} + 4 \right\},$$

$$x_1 \geq 0,\; x_2 \geq 0.$$

$$\mathbf{x}^* = (x_1^*, x_2^*) = (54/43, 166/43) = (1.25\ldots, 3.86\ldots),$$

$$v^* = 220/43 = 5.1162790\ldots.$$


7
4
Ponto Ótimo
Sobre esta reta f = 8.369325!
7/4
4
7
12
α=0.75
x*1=2.128918
x*2=3.290361
v* =5.419279
Visualizar Hipérbole
Não
Sim

3. Aceitar inadmissibilidade, penalizando déficits

- A idéia é acrescentar à função objetivo parcelas que penalizam inadmissibilidade.
- Notação: $z^- = \begin{cases} 0, & \text{se } z \geq 0, \\ -z, & \text{se } z < 0. \end{cases}$
- $(\omega_1\, x_1 + x_2 - 7)^-$ é uma "medida de inadmissibilidade", pois

$$x_1 \text{ e } x_2 \text{ não satisfazem a restrição } \omega_1\, x_1 + x_2 \geq 7$$
$$\Updownarrow$$
$$(\omega_1\, x_1 + x_2 - 7)^- > 0.$$

3. Aceitar inadmissibilidade, penalizando déficits

- A idéia é acrescentar à função objetivo parcelas que penalizam inadmissibilidade.
- Notação: $z^- = \begin{cases} 0, & \text{se } z \geq 0, \\ -z, & \text{se } z < 0. \end{cases}$
- $(\omega_1\, x_1 + x_2 - 7)^-$ é uma "medida de inadmissibilidade", pois

$$x_1 \text{ e } x_2 \text{ não satisfazem a restrição } \omega_1\, x_1 + x_2 \geq 7$$
$$\Updownarrow$$
$$(\omega_1\, x_1 + x_2 - 7)^- > 0.$$

- Escolhendo-se custos de penalidade unitários $q_1 > 0$ e $q_2 > 0$, as expressões

$$q_1\, \mathbb{E}_{\omega_1}\left[(\omega_1\, x_1 + x_2 - 7)^-\right] \quad \text{e} \quad q_2\, \mathbb{E}_{\omega_2}\left[(\omega_2\, x_1 + x_2 - 4)^-\right]$$

representam então, respectivamente, os custos médios para inadmissibilidade nas restrições $\omega_1\, x_1 + x_2 \geq 7$ e $\omega_2\, x_1 + x_2 \geq 4$.

3. Aceitar inadmissibilidade, penalizando déficits

Problema Original

$$
\begin{array}{lr}
\text{minimizar} & f(x_1, x_2) = x_1 + x_2 \\
\text{sujeito a} & \omega_1 \;\; x_1 + x_2 \geq 7, \\
 & \omega_2 \;\; x_1 + x_2 \geq 4, \\
 & x_1 \geq 0, \\
 & x_2 \geq 0.
\end{array}
$$

Problema via Penalidades

$$
\text{minimizar}
$$

$$
x_1 + x_2 + q_1 \, \mathbb{E}_{\omega_1} \left[(\omega_1 \, x_1 + x_2 - 7)^- \right] + q_2 \, \mathbb{E}_{\omega_2} \left[(\omega_2 \, x_1 + x_2 - 4)^- \right]
$$

sujeito a $x_1 \geq 0$, $x_2 \geq 0$.

Problema Original

$$
\begin{array}{lr}
\text{minimizar} & f(x_1, x_2) = x_1 + x_2 \\
\text{sujeito a} & \omega_1 \;\; x_1 + x_2 \geq 7, \\
 & \omega_2 \;\; x_1 + x_2 \geq 4, \\
 & x_1 \geq 0, \\
 & x_2 \geq 0.
\end{array}
$$

Problema via Penalidades

minimizar

$$x_1 + x_2 + q_1 \, \mathbb{E}_{\omega_1} \left[(\omega_1 \, x_1 + x_2 - 7)^- \right] + q_2 \, \mathbb{E}_{\omega_2} \left[(\omega_2 \, x_1 + x_2 - 4)^- \right]$$

sujeito a $x_1 \geq 0$, $x_2 \geq 0$.